Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Agraria

# Esercitazioni di Matematica

15 novembre 2005

**1** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x + 1}, \qquad f_2(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + 2} - \operatorname{arctg}(x \ln x)$$

**2** Risolvere i seguenti limiti, dopo aver verificato che valgono le ipotesi del Teorema di de l'Hôpital

$$\textbf{a)}\ \lim_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{sen} x - 4x^2}{2^x - \cos x + 4 \operatorname{tg} x}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - \cos(x^2) - 2 \operatorname{sen} x}{\ln(1+x) - x\mathrm{e}^x}$$

**3** Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'esistenza e il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha \mathrm{e}^{2x - x^2} + x \cos x - \sqrt{4 + x}}{2\alpha \cos(3x) - (x - \alpha)^2 - 3x}$$

**4** Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - ax^2 + 3a^2 & \text{se } x > 1 \\ ax + 4 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro reale $a$, la funzione $f$ è continua in ogni punto;

b) determinare per quali valori del parametro reale $a$, la funzione $f$ è derivabile in ogni punto.

**Soluzioni degli esercizi del 15 novembre 2005**

$\boxed{1}$ Utilizzando la regola di derivazione del quoziente:

$$f_1'(x) = \frac{(6x-2)(2x^2+5x+1)-(3x^2-2x+3)(4x+5)}{(2x^2+5x+1)^2} = \frac{19x^2-6x-17}{(2x^2+5x+1)^2}.$$

Utilizzando la regola di derivazione della funzione composta:

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x+2}}\cos x - \frac{1}{1+(x\ln x)^2}\big(\ln x + x\frac{1}{x}\big).$$

$\boxed{2}$ a) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} x - 4x^2}{2^x - \cos x + 4\operatorname{tg} x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x - 8x}{2^x\ln 2 + \operatorname{sen} x + \frac{4}{\cos^2 x}} = \frac{3}{\ln 2 + 4}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato vale allora $\frac{3}{\ln 2+4}$.

b) Il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital due volte consecutivamente si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\cos(x^2)-2\operatorname{sen} x}{\ln(1+x)-xe^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2x\operatorname{sen}(x^2)-2\cos x}{\frac{1}{1+x}-e^x-xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}+2\operatorname{sen}(x^2)+4x^2\cos(x^2)+2\operatorname{sen} x}{-\frac{1}{(1+x)^2}-e^x-e^x-xe^x} = \frac{4+0+0+0}{-1-1-1-0} = -\frac{4}{3}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato è $-4/3$.

$\boxed{3}$ Innanzitutto ha senso cercare di calcolare il limite percheé la funzione è definita in un intorno di $x_0 = 0$. Provando a sostituire $x = 0$ (le funzioni che intervengono sono continue) si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{2x-x^2}+x\cos x-\sqrt{4+x}}{2\alpha\cos(3x)-(x-\alpha)^2-3x} = \left[\frac{\alpha-2}{2\alpha-\alpha^2}\right]$$

Quando $2\alpha-\alpha^2 \neq 0$, cioè quando $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$, il limite non è in forma indeterminata (limite di funzione continua) e vale $\frac{\alpha-2}{2\alpha-\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}$.

Se $\alpha = 0$ il limite diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-x\cos x}{x^2+3x}$$

e si presenta nella forma d'indeterminazione [2/0]. Poiché il denominatore è negativo in un intorno sinistro di 0 e positivo in un intorno destro, si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4+x}-x\cos x}{x^2+3x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4+x}-x\cos x}{x^2+3x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty,$$

quindi il limite non esiste.

Infine, se $\alpha = 2$ il limite si presenta nella forma d'indeterminazione [0/0]. Applicando de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x-x^2}+x\cos x-\sqrt{4+x}}{4\cos(3x)-(x-2)^2-3x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x-x^2}(2-2x)+\cos x-x\operatorname{sen} x-\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{-12\operatorname{sen}(3x)-2x+1} = \frac{19}{4}.$$

Ricapitolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha e^{2x-x^2} + x\cos x - \sqrt{4+x}}{2\alpha\cos(3x) - (x-\alpha)^2 - 3x} = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 2, \\ \text{non esiste} & \text{se } \alpha = 0, \\ \frac{19}{4} & \text{se } \alpha = 2. \end{cases}$$

$\boxed{4}$ a) Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione continua, $f$ è una funzione continua in ogni punto $x \neq 1$, per qualsiasi scelta di $a$. Perché sia continua anche in $x = 1$ deve accadere che

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

Si ha facilmente $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = a + 4$. Dovrà dunque essere

$$a + 4 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x - ax^2 + 3a^2) = 3 - a + 3a^2$$

ovvero $3a^2 - 2a - 1 = 0$ che è verificata se e solo se $a = 1$ oppure $a = -1/3$. Per tali valori di $a$ la corrispondente funzione è continua in $\mathbb{R}$.

b) Coincidendo localmente con una funzione derivabile, $f$ è una funzione derivabile in ogni punto $x \neq 1$, per qualsiasi scelta di $a$, e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 3 - 2ax & \text{se } x > 1 \\ a & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Imponendo l'uguaglianza dei limiti destro e sinistro per $x \to 1$ della derivata, si ottiene

$$3 - 2a = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 1$$

Poiché per tale valore di $a$ la funzione è anche continua in $x_0 = 1$, allora è derivabile, e vale

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} f'(x) = 1$$

Quindi $f$ è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 1$.