Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

8 novembre 2005

1 Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-3x+4}{3x^2-5x^3+2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{y\to-2} \frac{7+2y}{y^2+y-2}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\,\mathrm{sen}(2x)+\cos(3x)-1}{4x^2-\mathrm{tg}(x^2)}$

2 Data la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)x^2-3a^2x+10 & \text{se } x<1 \\ 3-2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro reale a, la funzione f è continua in $\mathbb{R}$;

b) per tali valori dire se la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare il dominio, l'immagine e la legge della funzione inversa.

3 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$1+\log_3^2\left(|x|-1\right) \geq 5\log_3\sqrt{|x|-1}$$

Soluzioni degli esercizi del 8 novembre 2005

1 a) Il primo è un limite di una funzione razionale:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 3x + 4}{3x^2 - 5x^3 + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - 3/x^2 + 4/x^3}{3/x - 5 + 2/x^3} = \left[\frac{2 - 0 + 0}{0 - 5 - 0}\right] = -\frac{2}{5}$$

b) Il secondo limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{3}{0}]$. Studiamo quindi il segno della funzione in un intorno di $y_0 = -2$. Il numeratore tende a 3 e quindi è positivo per gli y vicini a -2. Poiché $y^2 + y - 2$ è positivo per gli $y < -2$ e negativo per gli $y > -2$ e vicini a -2, si ha

$$\lim_{y\to-2^\pm} \frac{7 + 2y}{y^2 + y - 2} = \left[\frac{3}{0^\mp}\right] = \mp\infty$$

quindi il limite non esiste.

c) Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Ricordando i limiti fondamentali

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

dividendo numeratore e denominatore per x^2, si ottiene

$$\lim_{x\to0} \frac{2x\operatorname{sen}(2x) + \cos(3x) - 1}{4x^2 - \operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x\to0} \frac{4\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} - 9\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}}{4 - \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2}} = \frac{4 \cdot 1 - 9 \cdot \frac{1}{2}}{4 - 1} = -\frac{1}{6}.$$

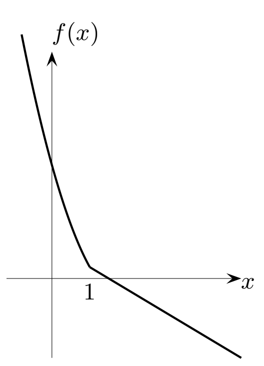
2 a) Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione continua, f è una funzione continua in ogni punto $x \neq 1$, per qualsiasi scelta di a. Perché sia continua anche in $x = 1$ deve accadere che

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$$

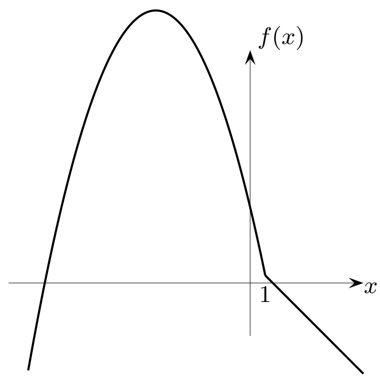
Si ha facilmente $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1$. Dovrà dunque essere

$$1 = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} ((1-a)x^2 - 3a^2x + 10) = (1 - a) - 3a^2 + 10$$

ovvero $3a^2 + a - 10 = 0$ che è verificato se e solo se $a = -2$ oppure $a = -5/3$.



Caso $a = -2$



Caso $a = -5/3$

b) Graficamente si riconosce che per $a = -2$ la funzione è invertibile mentre per $a = -5/3$ non lo è. Per $a = 2$ la funzione diventa

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x + 10 & \text{se } x < 1 \\ 3 - 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Se $y \in]-\infty, 1]$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 3 - 2x$ ottenendo quindi $x = \frac{3-y}{2}$.

Se, invece, $y \in]1, +\infty[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 3x^2 - 12x + 10$. L'equazione di secondo grado $3x^2 - 12x + 10 - y = 0$ ammette come soluzioni $x_- = \frac{6-\sqrt{6+3y}}{3}$ e $x_+ = \frac{6+\sqrt{6+3y}}{3}$. Poiché per $y > 1$ i corrispondenti x devono essere minori di 1, dobbiamo scegliere necessariamente $x = \frac{6-\sqrt{6+3y}}{3}$. Ricapitolando

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{6-\sqrt{6+3y}}{3} & \text{se } y > 1 \\ \frac{3-y}{2} & \text{se } y \leq 1 \end{cases}$$

3 Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $|x| - 1 > 0$. Per le proprietà dei logaritmi e riordinando i termini, si ottiene

$$\log_3^2 \big(|x| - 1\big) - \frac{5}{2} \log_3 \big(|x| - 1\big) + 1 \geq 0.$$

Operando la sostituzione $z = \log_3 \big(|x| - 1\big)$ si ha

$$z^2 - \frac{5}{2} z + 1 \geq 0$$

che è verificata se e solo se $z \leq 1/2$ oppure $z \geq 2$. Tornando alla variabile x otteniamo

$$\log_3 \big(|x| - 1\big) \leq 1/2 \quad \text{oppure} \quad \log_3 \big(|x| - 1\big) \geq 2$$

ovvero

$$|x| - 1 \leq \sqrt{3} \quad \text{oppure} \quad |x| - 1 \geq 9$$

e ricordandoci delle condizioni iniziali si ottiene che la disequazione è soddisfatta se e solo se

$$1 < |x| < 1 + \sqrt{3} \quad \text{oppure} \quad |x| > 10$$

quindi l'insieme delle soluzioni è

$$S =] - \infty, -10] \cup [-1 - \sqrt{3}, -1[\cup]1, 1 + \sqrt{3}] \cup [10, +\infty[$$