Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2005/2006

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

25 ottobre 2005

$\boxed{\mathbf{1}}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_{1/3}\big(2-|x+1|\big) \geq \log_{1/3}(x+2)-1$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{8}{4^x} > 2^{\sqrt{6x-x^2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Data la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3a-1 & \text{se } x>0 \\ 2x+1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro reale a, la funzione f è invertibile;

b) dire se per $a = 2$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare il dominio, l'immagine e la legge della funzione inversa;

Soluzioni degli esercizi del 25 ottobre 2005

$\boxed{1}$ Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere

$$\begin{cases} 2-|x+1|>0 \\ x+2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>|1+x| \\ x>-2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2>1+x>-2 \\ x>-2 \end{cases}$$

quindi $-2<x<1$. Osservato che $-1=\log_{1/3}3$, utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene che la disequazione è equivalente a

$$\log_{1/3}\big(2-|x+1|\big) \geq \log_{1/3}(x+2)+\log_{1/3}3 \quad \iff \quad \log_{1/3}\big(2-|x+1|\big) \geq \log_{1/3}(3x+6)$$

Poiché la funzione logaritmica in base $1/3$ è decrescente, quest'ultima equivale a

$$2-|x+1| \leq 3x+6$$

Distinguiamo due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo oppure negativo. Perciò la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-(x+1) \leq 3x+6, \end{cases} \cup \begin{cases} x+1<0 \\ 2+(x+1) \leq 3x+6. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzioni gli $x \geq -1$, il secondo $-3/2 \leq x < -1$. Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S=[-3/2,1[$$

$\boxed{2}$ Innanzitutto affinché le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, ovvero $6x-x^2 \geq 0$ cioè $0 \leq x \leq 6$. Poiché $8=2^3$ e $4^x=2^{2x}$, per le proprietà della funzione esponenziale la disequazione può essere scritta nella forma

$$2^{3-2x} > 2^{\sqrt{6x-x^2}}$$

e utilizzando la proprietà di crescenza della funzione esponenziale di base 2 si ottiene equivalentemente

$$3-2x > \sqrt{6x-x^2}.$$

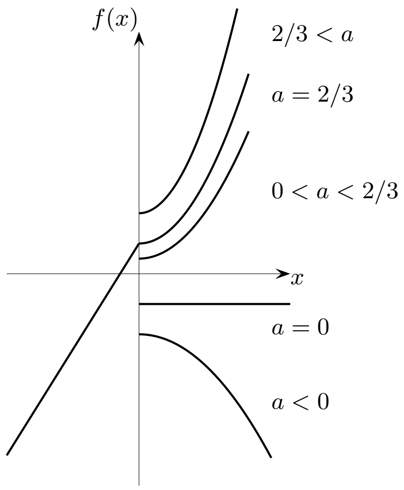
Affinché questa disequazione possa avere soluzioni, deve essere $3-2x>0$. A questo punto si può elevare al quadrato ambo i membri, perciò la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} 3-2x>0 \\ (3-2x)^2 > 6x-x^2 \\ 0 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

La disequazione di secondo grado ha come soluzioni $x<3/5$ oppure $x>3$, quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione data è

$$S=[0,3/5[$$

$\boxed{3}$ a) Rappresentiamo il grafico della funzioni per vari intervalli del parametro reale a



La funzione è invertibile se $a \geq 2/3$.

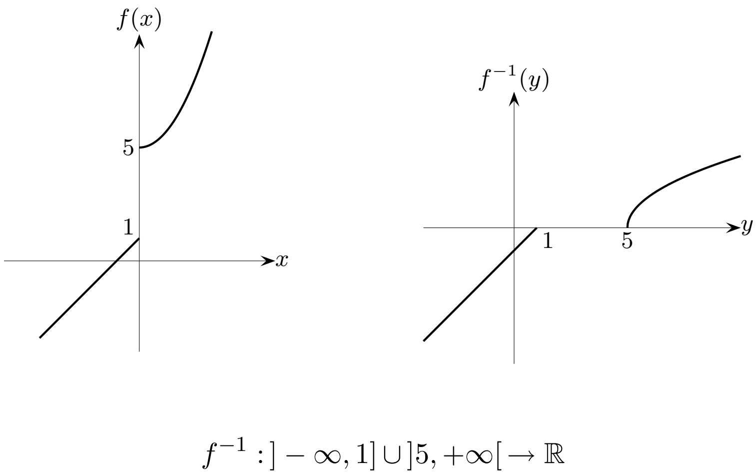
b) Sostituendo si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5 & \text{se } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e la funzione è invertibile. L'immagine di f è $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1] \cup]5, +\infty[$ che quindi è il dominio della funzione inversa. La sua immagine coincide col dominio di f cioè $\mathbb{R}$.

Se $y \in]-\infty, 1]$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 2x + 1$ ottenendo quindi $x = \frac{y-1}{2}$.

Se, invece, $y \in]5, +\infty[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 2x^2 + 5$, ovvero $x^2 = \frac{y-5}{2}$ e, poiché i corrispondenti x sono positivi, quest'ultima uguaglianza equivale a $x = \sqrt{\frac{y-5}{2}}$.



Ricapitolando

$$f^{-1} :]-\infty, 1] \cup]5, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2} & \text{se } y \leq 1 \\ \sqrt{\frac{y-5}{2}} & \text{se } y > 5 \end{cases}$$