Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in TWM

Programma del Corso di Analisi Matematica
Docente: Paolo Baiti

Numeri reali. Numeri naturali, interi, razionali. Le operazioni e loro proprietà. L'ordinamento. Insufficienza dei numeri razionali. I numeri reali come sezioni sui razionali e come allineamenti decimali. Proprietà dei numeri reali. Principio di Completezza. Massimo e minimo di un insieme. Massimo e minimo di un insieme finito. Insiemi limitati, limitati superiormente e inferiormente. Maggioranti e minoranti. Estremo superiore ed estremo inferiore. Insiemi non limitati superiormente o inferiormente. Esistenza dell'estremo superiore e inferiore (cenno alla dimostrazione). Il Principio d'Induzione. Disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica.

Funzioni. Funzioni elementari. Funzioni invertibili e funzione inversa. Funzioni pari e dispari. Le funzioni monotone: crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti. Le funzioni elementari: funzioni lineari/affini, potenze $n$esime, polinomi, funzioni razionali, radici $n$esime. Potenze di esponente razionale e reale. Proprietà delle potenze. La funzione esponenziale e logaritmica e loro proprietà. Il valore assoluto. Le funzioni trigonometriche, seno, coseno, tangente e cotangente, e loro proprietà. Le funzioni trigonometriche inverse: arcoseno e arcocoseno, l'arcotangente e loro proprietà.

Limiti e continuità. Il concetto di limite. Definizione di limite di una funzione in un punto. Intorni aperti e chiusi di un punto. La definizione di limite mediante gli intorni. Limite sinistro e limite destro. Il teorema sulle operazioni con i limiti (con dimostrazione nel caso del limite della somma). Funzioni continue in un punto. Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue. I polinomi e le funzioni razionali sono funzioni continue sul relativo dominio. Limiti $\pm\infty$. Limiti per x che tende a $\pm\infty$. Estensione del teorema sulle operazioni coi limiti. Limiti di successioni, successioni convergenti, divergenti, non regolari. Forme $L/0$. Continuità a destra e a sinistra. La disuguaglianza debole viene conservata passando al limite. Teorema dei due carabinieri (con dimostrazione). Teorema della permanenza del segno (con dimostrazione). Teorema del confronto nel caso di limite infinito. Continuità della funzione esponenziale. Continuità delle funzioni trigonometriche. Limiti notevoli di funzioni trigonometriche. Teorema di cambiamento di variabile nei limiti. Limite del prodotto di una funzione limitata per una funzione tendente a 0. Limite di funzioni e successioni monotone. Limite di una progressione geometrica. Limite dell'esponenziale a $\pm\infty$. Limite del logaritmo in 0 e a $+\infty$. Limite dell'arcotangente a $\pm\infty$. Studio della successione $(1 + 1/n)^n$ e sua relazione in un problema finanziario. Il numero di Nepero. Limiti notevoli di funzioni esponenziali e logaritmiche. Vari metodi iterativi per il calcolo delle radici quadrate, con stima dell'errore. Teorema degli intervalli inclusi, di bisezione (senza dimostrazione). Le funzioni continue su un intervallo limitato sono limitate (con dimostrazione). Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati (con dimostrazione). Definizione di zero di una funzione. Teorema dell'esistenza degli zeri (con dimostrazione). Calcolo approssimato di uno zero di una funzione continua. Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione).

Calcolo differenziale. Le derivate. Esempi introduttivi: retta tangente al grafico e velocità istantanea. Il rapporto incrementale e la definizione di derivata di una funzione in un punto. Derivata sinistra e derivata destra. Le derivate delle funzioni elementari. La derivabilità implica la continuità ma non viceversa (con dimostrazione). Un esempio di funzione continua ma non derivabile: il valore assoluto. Un esempio di funzione non derivabile: $x \operatorname{sen}(1/x)$. Funzione derivata. Derivata seconda e derivate successive. Derivata della somma, del prodotto, del reciproco, del quoziente (con dimostrazioni). Derivata della composizione e della funzione inversa (con dimostrazioni). Regola di de L'Hôpital. Punti di massimo e minimo locale. Quando la derivata esiste, si annulla nei punti estremanti interni. Casistica di punti di massimo e minimo locale. Ricerca dei massimi e minimi locali/globali. Teorema di Rolle (con dimostrazione). Teorema del Valor Medio di Lagrange con interpretazione geometrica (con dimostrazione). Teorema della derivata nulla. Relazioni tra derivata prima e proprietà di monotonia. Criterio della derivata seconda per lo studio dei massimi e minimi relativi. Varie applicazioni del Teorema di Lagrange. Funzioni convesse e concave. Relazioni tra la derivata seconda e la convessità. Punti di flesso. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Le notazioni di Landau "o piccolo, o grande". Studio del grafico di una funzione. Teorema di sostituzione degli infinitesimi. Riformulazione della derivabilità in termini di o piccolo. Polinomi e formula di Taylor e di MacLaurin. Formula di Taylor con resto di Peano (con dimostrazione). La formula di MacLaurin dell'esponenziale, del seno, coseno, tangente, arcoseno, arcotangente, e di $\ln(1 + x)$. Formula di Taylor con resto di Lagrange.

Calcolo integrale. Il problema dell'area di una regione di piano. Integrale definito e indefinito. Trapezoidi e plurirettangoli. Somme superiori e inferiori. L'integrale di Riemann e le funzioni integrabili. Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili (senza dimostrazione). L'integrale di una funzione di segno qualunque. Integrali orientati. Proprietà di linearità dell'integrale. Proprietà di additività rispetto al dominio. Il Teorema della media integrale (con dimostrazione). Primitive di una funzione e integrale indefinito. Due primitive su un intervallo differiscono per una costante. Legame tra i due concetti di integrale. La funzione integrale. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale. La formula fondamentale del calcolo integrale. Calcolo integrale: integrazione immediata mediante le tabelle. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione.

Serie numeriche. Il paradosso di Zenone e la serie $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$. La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Il concetto di serie. Somme parziali di una serie. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. La serie geometrica: formula per le serie parziali e risultati di convergenza. La serie $0.9999\ldots$ e la rappresentazione decimale. Linearità della somma di serie convergenti. Condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo. Le serie a termini positivi non sono mai indeterminate. Criterio del confronto. Criterio di asintoticità (con dimostrazione). La serie armonica diverge (due dimostrazioni). La serie di Mengoli. Convergenza e divergenza delle serie armoniche generalizzate. Criterio del rapporto per la convergenza o divergenza di serie positive (due versioni, con dimostrazione). Criterio della radice n-esima per la convergenza o divergenza di serie positive (due versioni). Serie a termini di segno qualsiasi: criterio della convergenza assoluta. Il Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. Esempio: la serie armonica a segni alterni.

Funzioni di due variabili reali. Funzioni di due variabili e loro visualizzazione: superfici in tre dimensioni. Grafici di densità, insiemi di livello. Cenni alla definizione di limite e di continuità in due variabili. Esempi di funzioni senza limite nell'origine. Derivate parziali: loro calcolo e interpretazione geometrica. Cenno al piano tangente. Gradiente. Derivate parziali seconde. Teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste (cenno). Punti stazionari: massimi locali, minimi locali, punti di sella. La matrice Hessiana e l'Hessiano. Uso della matrice hessiana per decidere il tipo di punto stazionario (senza dimostrazione). Esempio di studio dei punti stazionari.

Equazioni differenziali. Equazioni differenziali ordinarie: concetto e definizione di soluzione. Il Problema di Cauchy (cenni). Soluzione generale per le equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti. Principio di sovrapposizione delle soluzioni. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione caratteristica e soluzione dell'equazione omogenea associata. Applicazione al problema delle piccole oscillazioni di un pendolo, di una molla con o senza attrito.