Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 25 maggio 2005

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri della radice e/o del rapporto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^{n} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2+4}{k^2+2}\right)^{k} \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2m+1}{3m+2}\right)^{m^2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{m^2}{m^2+1}\right)^{m} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n+3}\right)^{n} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k^2+1}{3k^2+2}\right)^{2k-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)e^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{4^n n!}$$

Esercizio 2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie. Per la prima utilizzare, qualora necessario e possibile, il criterio di Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n}{3n^4+1} \qquad \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2m+1}{m^3+2m+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-\ln n} \qquad \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k+2}{k^2+4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3-1}}$$

Esercizio 3. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n^2-3n+4)},$$

a) verificare che si tratta di una serie a segni alterni e studiare la convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibniz;

b) (Avanzato) provare che la serie diverge assolutamente.

Esercizio 4. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}(1+3n)\right)}{n+2}$$

verificare che si tratta di una serie a segni alterni e studiare la convergenza semplice e assoluta.

Esercizio 5. (Avanzato) Dimostrare che se la serie a termini positivi $\sum^{\infty} a_n$ converge allora converge anche la serie $\sum^{\infty} a_n^2$.

Esercizio 6. (Avanzato) Dimostrare che la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$$

non converge (Suggerimento: considerare la successione delle ridotte s_{2n}). Questo fatto contraddice il criterio di Leibniz?