

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
 Corso di Laurea in T.W.M.

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA

Esercizi del 12 maggio 2005

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti serie e, quando possibile, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{7^n} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^m \quad \sum_{k=2}^{+\infty} 4^{-k} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{1-2n}$$

Esercizio 2. a) Dimostrare, ad esempio per induzione, la formula

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+2)}$$

Esercizio 3. a) Dimostrare, ad esempio per induzione, la formula

$$\sum_{k=1}^n \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \ln \frac{2(n+1)}{n+2}$$

b) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

Esercizio 4. Per quali valori di x è valida la seguente relazione?

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} + \frac{8}{x^7} + \dots = \frac{x}{x^2 - 2}$$

Esercizio 5. (Avanzato. Proprietà delle “serie telescopiche”) a) Dimostrare che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n) - f(n+1)] = f(1) - L$$

b) Utilizzare a) per dimostrare che

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n] = \frac{\pi}{4} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1 \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{1}{12}$$

Esercizio 6. (Avanzato) Discutere, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\left(\frac{2-3x}{x+2}n\right)}$$

e, quando possibile, calcolarne la somma $S(x)$.