Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 14 ottobre 2004

1) Dato l'insieme
$$A_1 = \left\{ \frac{5n+1}{3n} \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
verificare che 2 è il massimo di A_1 e, utilizzando le proprietà caratterizzanti dell'estremo inferiore, che $5/3$ è l'estremo inferiore di A_1. È anche il minimo?

2) Dato l'insieme
$$A_2 = \left\{ \frac{1-n}{1+n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$
verificare che -1 è l'estremo inferiore di A_2 e 1 è il massimo di A_2.

4) Utilizzando il Principio d'Induzione, dimostrare che perogni $n \geq 1$ valgono
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$
$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = 2^{n+1}(n-1) + 2$$
$$2n \leq 2^n$$

5) Usando il fatto che $(n+1)^2/n^2 \leq 2$, dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 4$ vale $n^2 \leq 2^n$.

6) Definiamo i numeri a_n $(n \geq 0)$ per ricorrenza nel seguente modo:
$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$
Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ vale $a_n \leq 2$.