Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Analisi Matematica

Compitino del 23 giugno 2005 - Tema 1

Cognome e Nome — Matricola

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Consegnare anche il presente testo.

B1 Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x + 3}{\cos^2 x}, \qquad f_2(x) = \frac{2\sqrt{x}e^{3x} + 3x}{\sqrt{x}},$$

B2 Calcolare, utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $f_3(x) = (2x^3 - 1)\ln x$.

B3 Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{3n^3 + n^4 + 4}, \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n) \frac{2}{3 + e^{-n}}, \qquad \textbf{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{3^{n^2}}.$$

B4 Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $g(x, y) = \ln(y - x^2) - \ln(y - 2x)$.

B5 Determinare il dominio e i punti critici della funzione $h(x, y) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{x} - y + 4$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

A1 Si calcoli mediante la sostituzione $x = t^6$

$$\int_0^2 \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - 2}\, dx$$

A2 Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n \ln n - \ln(n+1)}{n^2 + 3},$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando, dopo averne verificato le ipotesi, il criterio di Leibniz;

b) provare che la serie diverge assolutamente.

A3 Descrivere geometricamente le linee di livello dell'esercizio B4, e rappresentare graficamente quelle di livello $\ln(1/2)$, 0 e $\ln 3$.

Punteggi: 2+2, 3, 3+3+3, 2, 4, 5, 5+3, 5

Soluzioni del Tema 1

B1

$$\int \frac{\operatorname{sen} x + 3}{\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{\cos x} + 3\operatorname{tg} x + c.$$

$$\int \frac{2\sqrt{x}\mathrm{e}^{3x} + 3x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \mathrm{e}^{3x}\, dx + 3\int x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} + 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} + 2\sqrt{x^3} + c.$$

B2 Applicando il metodo per parti si ottiene

$$\int (2x^3 - 1)\ln x\, dx = \left(\frac{2}{4}x^4 - x\right)\ln x - \int \left(\frac{2}{4}x^4 - x\right)\frac{1}{x}\, dx = \left(\frac{x^4}{2} - x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{2} - 1\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^4}{8} + x + c.$$

B3a Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$ che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è convergente.

B3b Applicando il criterio necessario si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(n)\frac{2}{3 + \mathrm{e}^{-n}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3} \neq 0,$$

quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini positivi, diverge.

B3c Utilizzando il criterio della radice si ottiene

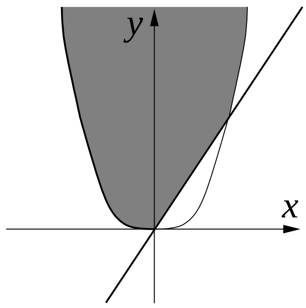
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{3^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3^n} = 0 < 1.$$

Dunque la serie converge.

B4 a) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D}_g = \left\{(x, y) :\ y - x^2 > 0,\ y - 2x > 0\right\},$$

ed è dunque la regione ottenuta come intersezione del semipiano superiore di supporto la retta $y = 2x$ e la regione convessa individuata dalla parabola di equazione $y = x^2$.



B5 Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{(x, y) :\ x \neq 0, y \neq 0\}$ ed è quindi $\mathbb{R}^2$ tranne gli assi cartesiani.

I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} - 1 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x^2, \\ x = -y^2. \end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda si ottiene $x = -x^4$ e dividendo per x (che è non nullo sul dominio) si ha $x^3 = -1$ la cui unica soluzione è $x = -1$. Sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene $y = -1$. Abbiamo dunque trovato l'unico punto critico $P = (-1, -1)$.

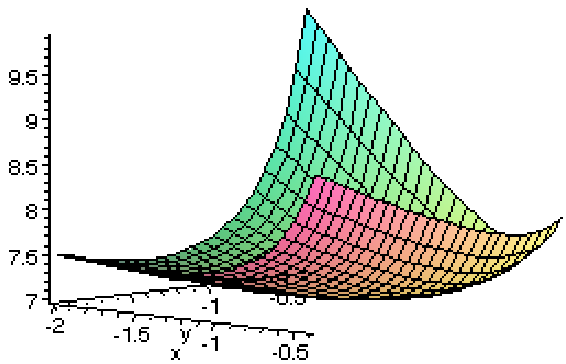
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2},$$

perciò l'Hessiano nel punto P è

$$H(-1,-1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Poiché gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, allora P è punto di minimo relativo.



A1 Si ha che $x = t^6$, quindi $dx = 6t^5\,dt$. Inoltre $t = \sqrt[6]{x}$ perciò i nuovi estremi d'integrazione sono 0 e $\sqrt[6]{2}$. Quindi

$$\int_0^2 \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\,dx = \int_0^{\sqrt[6]{2}} \frac{\sqrt[6]{t^6}}{\sqrt[3]{t^6}-2} 6t^5\,dt = 6\int_0^{\sqrt[6]{2}} \frac{t^6}{t^2-2}\,dt$$

Operando la divisione tra polinomi si ottiene

$$t^6 = (t^2-2)(t^4+2t^2+4)+8,$$

perciò l'integrale diventa

$$6\int_0^{\sqrt[6]{2}} \frac{t^6}{t^2-2}\,dt = 6\int_0^{\sqrt[6]{2}} (t^4+2t^2+4)\,dt + 48\int_0^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{t^2-2}\,dt.$$

Il polinomio t^2-2 ammette due radici $t_1 = -\sqrt{2}$, $t_2 = \sqrt{2}$. Per trovare l'integrale, scomponiamo la funzione razionale nel seguente modo

$$\frac{1}{t^2-2} = \frac{A}{t+\sqrt{2}} + \frac{B}{t-\sqrt{2}} = \frac{(A+B)t+(B-A)\sqrt{2}}{(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A+B=0, \\ (B-A)\sqrt{2} = 1. \end{cases}$$

Si ottiene $A = -1/(2\sqrt{2})$, $B = 1/(2\sqrt{2})$ quindi

$$\int_0^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{t^2-2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt[6]{2}} \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$$

perciò

$$\begin{aligned} 6\int_0^{\sqrt[6]{2}} (t^4+2t^2+4)\,dt + 48\int_0^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{t^2-2}\,dt &= \left[6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}t^3+4t\right) + \frac{24}{\sqrt{2}}\big(\ln|t-\sqrt{2}| - \ln|t+\sqrt{2}|\big)\right]_0^{\sqrt[6]{2}} \\ &= \frac{6\sqrt[6]{2^5}}{5} + 4\sqrt[6]{2^3} + 24\sqrt[6]{2} + \frac{24}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{2}-\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}+\sqrt{2}}\right| \end{aligned}$$

A2 a) Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto

$$a_n = \frac{n\ln n - \ln(n+1)}{n^2+3}$$

bisogna dimostrare che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 2$. Appare chiaro che la disuguaglianza è vera per tutti gli n grandi ma non è immediato verificarlo per ogni $n \geq 2$. Ciò può essere fatto in vari modi. Ad esempio si può osservare che

$$n\ln n - \ln(n+1) \geq 0 \iff \ln(n^n) \geq \ln(n+1) \iff n^n \geq n+1 \iff n^n - n - 1 \geq 0$$

Essendo $n^n - n - 1 \geq n^2 - n - 1 \geq 0$ per ogni $n \geq 2$, si ha la tesi. Alternativamente, si potrebbe introdurre la funzione $k(x) = x\ln x - \ln(x+1)$ e verificare che $k(2) \geq 0$ e k è crescente per $x \geq 2$. La serie è dunque una serie a segni alterni.

Verifichiamo che il termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n - \ln(n+1)}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{0-0}{1} = 0.$$

Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{x\ln x - \ln(x+1)}{x^2+3}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1 - \frac{1}{x+1})(x^2+3) - (x\ln x - \ln(x+1))2x}{(x^2+3)^2} = \frac{\frac{x(x^2+3)}{x+1} + 2x\ln(x+1) + (3-x^2)\ln x}{(x^2+3)^2}$$

Si ha che $f'(x) \leq 0$ se e solo se

$$\frac{x(x^2+3)}{x+1} + 2x\ln(x+1) + (3-x^2)\ln x \leq 0$$

Essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x(x^2+3)}{x+1} + 2x\ln(x+1) + (3-x^2)\ln x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{x(x^2+3)}{x^2(x+1)} + 2\frac{\ln(x+1)}{x} + (\frac{3}{x^2} - 1)\ln x\right) = \big[+\infty \cdot (1 + 0 - \infty)\big] = -\infty$$

si deve avere $f'(x) \leq 0$ definitivamente per $x \geq x_0$ per qualche x_0. Dunque la funzione f è decrescente per ogni ogni $x \geq x_0$ e di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq x_0$.

In conclusione, per il criterio di Leibniz la serie converge.

b) Utilizziamo il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$|a_n| \sim \frac{n\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln 2}{n}.$$

La serie di termine generale $\frac{\ln 2}{n}$ diverge quindi per confronto diverge anche la serie di termine generale $\frac{\ln n}{n}$ e per asintoticità diverge anche quella di termine generale $|a_n|$. Dunque la serie data diverge assolutamente.

A3 L'insieme L_k di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Sul dominio, tale equazione equivale a

$$\ln\frac{y-x^2}{y-2x} = k \iff \frac{y-x^2}{y-2x} = \mathrm{e}^k \iff y - x^2 = \mathrm{e}^k(y-2x)$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli insiemi di livello L_k descrivono un fascio di parabole passanti per i punti intersezione di $y - x^2 = 0$ e $y - 2x = 0$, ottenuti come soluzioni di

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

che sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,4)$. Chiaramente, di tali parabole va considerata solamente la parte che cade all'interno del dominio di g. Per ogni $k \neq 0$ (per cui $\mathrm{e}^k \neq 1$) si ha inoltre

$$y - x^2 = \mathrm{e}^k(y - 2x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{1-\mathrm{e}^k}x^2 - \frac{2\mathrm{e}^k}{1-\mathrm{e}^k}x$$

quindi il vertice della parabola relativa a k è $V_k = (\mathrm{e}^k, \frac{\mathrm{e}^{2k}}{\mathrm{e}^k - 1})$. Le coordinate (x, y) del vertice, soddisfano allora

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^k \\ y = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{\mathrm{e}^k-1} \end{cases} \qquad \text{e sostituendo } x = \mathrm{e}^k \text{ nella seconda} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x^2}{x-1}$$

In conclusione (per $k \neq 0$) gli insiemi di livello L_k descrivono (la parte che cade nel dominio di g di) tutte le parabole che hanno il vertice sulla curva di equazione $y = \frac{x^2}{x-1}$ e che passano per P_1 e P_2. In particolare

$$L_{\ln(1/2)} = \mathcal{D}_g \cap \{y = 2x^2 - 2x\}$$
$$L_{\ln 2} = \mathcal{D}_g \cap \{y = -x^2 + 4x\}$$

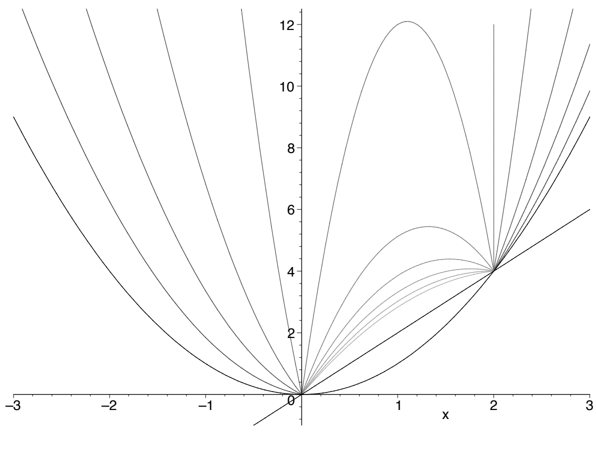
Il caso $k = 0$ è speciale perché la variabile y si cancella e l'equazione $y - x^2 = \mathrm{e}^k(y - 2x)$ diventa

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \text{ oppure } x = 2$$

quindi

$$L_0 = \mathcal{D}_g \cap \{x = 0 \text{ oppure } x = 2\}$$

è dato dall'intersezione del dominio $\mathcal{D}_g$ della funzione g con le rette verticali $x = 0$ e $x = 2$.



Tema 2

B1 Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{2 - \operatorname{sen} x}{3\cos^2 x}, \qquad f_2(x) = \frac{x + 3\sqrt[3]{x}\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt[3]{x}},$$

B2 Calcolare, utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $f_3(x) = (3x+4x^2)\ln x$.

B3 Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(5n)^n}, \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2n^2+1}{4n^3+n+2}, \qquad \textbf{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(2+\frac{1}{n^3}\right)\operatorname{arctg}(n).$$

B4 Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $g(x,y) = \ln(y+x^2) - \ln(2y+2x)$.

B5 Determinare il dominio e i punti critici della funzione $h(x,y) = \dfrac{8}{y} + \dfrac{y}{x} - x + 3$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

A1 Si calcoli mediante la sostituzione $x = t^4$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x}\,(4-\sqrt[2]{x})}\,dx$$

A2 Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n\ln n - \ln(n^2+1)}{n^2+1},$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando, dopo averne verificato le ipotesi, il criterio di Leibniz;

b) provare che la serie diverge assolutamente.

A3 Descrivere geometricamente le linee di livello dell'esercizio B4, e rappresentare graficamente quelle di livello $\ln(1/3)$, $\ln(1/2)$ e 0.

Soluzioni del Tema 2

B1

$$\int \frac{2-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = 2\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + c.$$

$$\int \frac{x + 3\sqrt[3]{x}\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{2/3}\,dx + 3\int \mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + c.$$

B2 Applicando il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int (3x+4x^2)\ln x\,dx &= \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3\right)\ln x - \int \left(\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3\right)\frac{1}{x}\,dx \\ &= \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3\right)\ln x - \int \left(\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}x^2\right)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3\right)\ln x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + c.\end{aligned}$$

B3a Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{(5n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{5n} = +\infty > 1.$$

Dunque la serie diverge.

B3b Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{2n^2}{4n^3} = \frac{1}{2n}$ che è il termine generale di una serie divergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è divergente.

B3c Applicando il criterio necessario si vede che

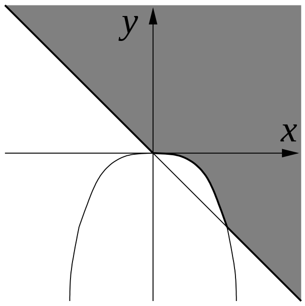
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(2+\frac{1}{n^3}\right) \operatorname{arctg}(n) = \ln 2 \cdot \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini positivi, diverge.

B4 a) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D}_g = \left\{(x,y):\ y+x^2>0,\ 2y+2x>0\right\},$$

ed è dunque la regione ottenuta come intersezione del semipiano superiore di supporto la retta $y=-x$ e la regione non convessa individuata dalla parabola di equazione $y=-x^2$.



B5 Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{(x,y):\ x\neq 0, y\neq 0\}$ ed è quindi $\mathbb{R}^2$ tranne gli assi cartesiani. I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{8}{y^2} + \dfrac{1}{x} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x^2, \\ 8x = y^2. \end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda si ottiene $8x = x^4$ e dividendo per x (che è non nullo sul dominio) si ha $x^3 = 8$ la cui unica soluzione è $x=2$. Sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene $y=-4$. Abbiamo dunque trovato l'unico punto critico $P=(2,-4)$.

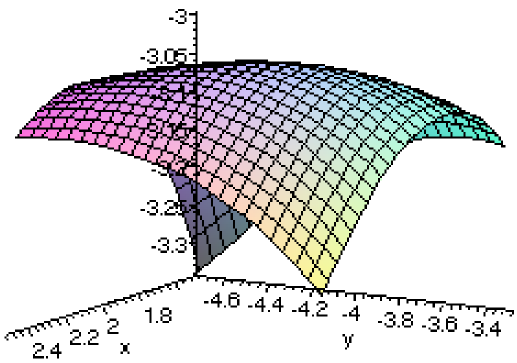
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{16}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2},$$

perciò l'Hessiano nel punto P è

$$H(2,-4) = \begin{vmatrix} -1 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0.$$

Poiché gli elementi sulla diagonale principale sono negativi, allora P è punto di massimo relativo.



A1 Si ha che $x = t^4$, quindi $dx = 4t^3\, dt$. Inoltre $t = \sqrt[4]{x}$ perciò i nuovi estremi d'integrazione sono 1 e $\sqrt[4]{2}$. Quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x}\left(4 - \sqrt[2]{x}\right)}\, dx = \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{t^4}\left(4 - \sqrt[2]{t^4}\right)} 4t^3\, dt = 4\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{t^2}{4 - t^2}\, dt$$

Operando la divisione tra polinomi si ottiene

$$t^2 = -(4 - t^2) + 4,$$

perciò l'integrale diventa

$$4\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{t^2}{4 - t^2}\, dt = -4\int_1^{\sqrt[4]{2}} dt - 16\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{t^2 - 4}\, dt.$$

Il polinomio $t^2 - 4$ ammette due radici $t_1 = -2$, $t_2 = 2$. Per trovare l'integrale, scomponiamo la funzione razionale nel seguente modo

$$\frac{1}{t^2 - 4} = \frac{A}{t + 2} + \frac{B}{t - 2} = \frac{(A + B)t + 2(B - A)}{(t + 2)(t - 2)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A + B = 0, \\ 2B - 2A = 1. \end{cases}$$

Si ottiene $A = -1/4$, $B = 1/4$ quindi

$$\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{t^2 - 4}\, dt = \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt[4]{2}} \left(\frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 2}\right) dt$$

perciò

$$\begin{aligned} -4\int_1^{\sqrt[4]{2}} dt - 16\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{t^2 - 4}\, dt &= \Big[-4t - 4\big(\ln|t - 2| - \ln|t + 2|\big)\Big]_1^{\sqrt[4]{2}} \\ &= 4 - 4\sqrt[4]{2} + 4\ln\left|\frac{\sqrt[4]{2} + 2}{\sqrt[4]{2} - 2}\right| - 4\ln 3 \end{aligned}$$

A2 a) Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto

$$a_n = \frac{2n\ln n - \ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1}$$

bisogna dimostrare che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 2$. Appare chiaro che la disuguaglianza è vera per tutti gli n grandi ma non è immediato verificarlo per ogni $n \geq 2$. Ciò può essere fatto in vari modi. Ad esempio si può osservare che

$$2n\ln n - \ln(n^2 + 1) \geq 0 \iff \ln(n^{2n}) \geq \ln(n^2 + 1) \iff n^{2n} \geq n^2 + 1 \iff n^{2n} - n^2 - 1 \geq 0$$

Essendo $n^{2n} - n^2 - 1 \geq (n^2)^2 - n^2 - 1 \geq 0$ per ogni $n \geq 2$, si ha la tesi. Alternativamente, si potrebbe introdurre la funzione $k(x) = 2x\ln x - \ln(x^2 + 1)$ e verificare che $k(2) \geq 0$ e k è crescente per $x \geq 2$. La serie è dunque una serie a segni alterni.

Verifichiamo che il termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n\ln n - \ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\ln n}{n} - \frac{\ln(n^2+1)}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0 - 0}{1} = 0.$$

Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{2x\ln x - \ln(x^2+1)}{x^2+1}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2\ln x + 2 - \frac{2x}{x^2+1})(x^2+1) - (2x\ln x - \ln(x^2+1))2x}{(x^2+1)^2} \\ &= 2\,\frac{x^2 - x + 1 + x\ln(x^2+1) + (1-x^2)\ln x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Si ha che $f'(x) \leq 0$ se e solo se

$$x^2 - x + 1 + x\ln(x^2+1) + (1-x^2)\ln x \leq 0$$

Essendo

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} \big(x^2 - x + 1 + x\ln(x^2+1) + (1-x^2)\ln x\big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{x^2-x+1}{x^2} + \frac{\ln(x^2+1)}{x} + (\frac{1}{x^2} - 1)\ln x\right) = \big[+\infty \cdot (1 + 0 - \infty)\big] = -\infty \end{aligned}$$

si deve avere $f'(x) \leq 0$ definitivamente per $x \geq x_0$ per qualche x_0. Dunque la funzione f è decrescente per ogni ogni $x \geq x_0$ e di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq x_0$.

In conclusione, per il criterio di Leibniz la serie converge.

b) Utilizziamo il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$|a_n| \sim \frac{2n\ln n}{n^2} = \frac{2\ln n}{n} \geq \frac{2\ln 2}{n}.$$

La serie di termine generale $\frac{2\ln 2}{n}$ diverge quindi per confronto diverge anche la serie di termine generale $\frac{2\ln n}{n}$ e per asintoticità diverge anche quella di termine generale $|a_n|$. Dunque la serie data diverge assolutamente.

A3 L'insieme L_k di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Sul dominio, tale equazione equivale a

$$\ln\frac{y+x^2}{2y+2x} = k \quad\iff\quad \frac{y+x^2}{2y+2x} = \mathrm{e}^k \quad\iff\quad y + x^2 = 2\mathrm{e}^k(y+x)$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli insiemi di livello L_k descrivono un fascio di parabole passanti per i punti intersezione di $y + x^2 = 0$ e $y + x = 0$, ottenuti come soluzioni di

$$\begin{cases} y + x^2 = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

che sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,-1)$. Chiaramente, di tali parabole va considerata solamente la parte che cade all'interno del dominio di g. Per ogni $k \neq \ln(1/2)$ (per cui $2\mathrm{e}^k \neq 1$) si ha inoltre

$$y + x^2 = 2\mathrm{e}^k(y+x) \quad\iff\quad y = \frac{1}{2\mathrm{e}^k - 1}x^2 - \frac{2\mathrm{e}^k}{2\mathrm{e}^k - 1}x$$

quindi il vertice della parabola relativa a k è $V_k = (\mathrm{e}^k, \frac{\mathrm{e}^{2k}}{1-2\mathrm{e}^k})$. Le coordinate (x,y) del vertice, soddisfano allora

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^k \\ y = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{1-2\mathrm{e}^k} \end{cases} \qquad \text{e sostituendo } x = \mathrm{e}^k \text{ nella seconda} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x^2}{1-2x}$$

In conclusione (per $k \neq \ln(1/2)$) gli insiemi di livello L_k descrivono (la parte che cade nel dominio di g di) tutte le parabole che hanno il vertice sulla curva di equazione $y = \frac{x^2}{1-2x}$ e che passano per P_1 e P_2. In particolare

$$L_{\ln(1/3)} = \mathcal{D}_g \cap \{y = -3x^2 + 2x\}$$

$$L_0 = \mathcal{D}_g \cap \{y = \frac{1}{2}x^2 - 2x\}$$

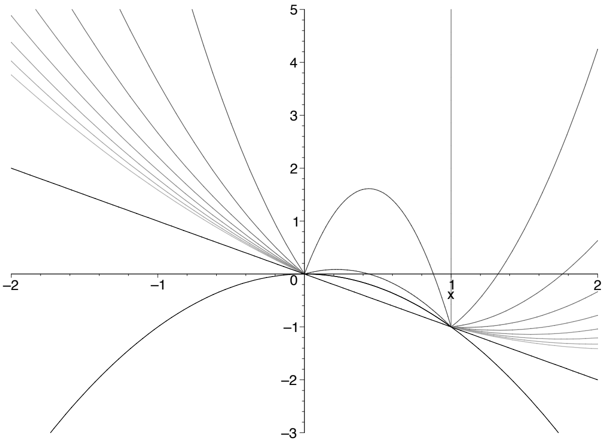
Il caso $k = \ln(1/2)$ è speciale perché la variabile y si cancella e l'equazione $y + x^2 = 2\mathrm{e}^k(y + x)$ diventa

$$x^2 - x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \text{ oppure } x = 1$$

quindi

$$L_{\ln(1/2)} = \mathcal{D}_g \cap \{x = 0 \text{ oppure } x = 1\}$$

è dato dall'intersezione del dominio $\mathcal{D}_g$ della funzione g con le rette verticali $x = 0$ e $x = 1$.



Tema 3

B1 Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{5 \operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x}, \qquad f_2(x) = \frac{x\mathrm{e}^{4x} - 4\sqrt[3]{x}}{x},$$

B2 Calcolare, utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $f_3(x) = (3x^2 + 1)\ln x$.

B3 Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3n^4 + 1}{2n^5 + 2n^2 + 4}, \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{n^{4n}}, \qquad \textbf{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 + \mathrm{e}^{-n}} \ln\left(3 + \frac{1}{n^2}\right).$$

B4 Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $g(x, y) = \ln(2y + 2x^2) - \ln(y + 2x)$.

B5 Determinare il dominio e i punti critici della funzione $h(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y - 2$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

A1 Si calcoli mediante la sostituzione $x = t^4$

$$\int_0^3 \frac{\sqrt[4]{x}}{9 - \sqrt[2]{x}}\, dx$$

A2 Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3n\ln n - \ln(n^3+1)}{n^2+1},$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando, dopo averne verificato le ipotesi, il criterio di Leibniz;

b) provare che la serie diverge assolutamente.

A3 Descrivere geometricamente le linee di livello dell'esercizio B4, e rappresentare graficamente quelle di livello 0, $\ln 2$ e $\ln 3$.

Soluzioni del Tema 3

B1

$$\int \frac{5\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x}\,dx = -5\int \frac{-\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{5}{\cos x} - \mathrm{tg}\,x + c.$$

$$\int \frac{x\mathrm{e}^{4x} - 4\sqrt[3]{x}}{x}\,dx = \int \mathrm{e}^{4x}\,dx - 4\int x^{-2/3}\,dx = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} - 4\frac{x^{1/3}}{1/3} + c = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} - 12\sqrt[3]{x} + c.$$

B2 Applicando il metodo per parti si ottiene

$$\int (3x^2+1)\ln x\,dx = \left(x^3+x\right)\ln x - \int \left(x^3+x\right)\frac{1}{x}\,dx = \left(x^3+x\right)\ln x - \int \left(x^2+1\right)\,dx$$
$$= \left(x^3+x\right)\ln x - \frac{x^3}{3} - x + c.$$

B3a Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{3n^4}{2n^5} = \frac{3}{2n}$ che è il termine generale di una serie divergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è divergente.

B3b Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{n^{4n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^4} = +\infty > 1.$$

Dunque la serie diverge.

B3c Applicando il criterio necessario si vede che

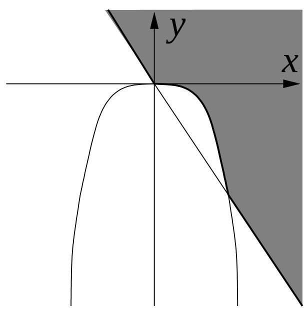
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4+\mathrm{e}^{-n}} \ln\left(3 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{4}\cdot \ln 3 \neq 0,$$

quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini positivi, diverge.

B4 a) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D}_g = \left\{(x,y):\ 2y + 2x^2 > 0,\ y + 2x > 0\right\},$$

ed è dunque la regione ottenuta come intersezione del semipiano superiore di supporto la retta $y = -2x$ e la regione convessa individuata dalla parabola di equazione $y = -x^2$.



B5 Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{(x, y):\ x \neq 0, y \neq 0\}$ ed è quindi $\mathbb{R}^2$ tranne gli assi cartesiani.

I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{8}{x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} - 1 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 8y = x^2, \\ x = -y^2. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima si ottiene $8y = y^4$ e dividendo per y (che è non nullo sul dominio) si ha $y^3 = 8$ la cui unica soluzione è $y = 2$. Sostituendo questo valore nella seconda equazione si ottiene $x = -4$. Abbiamo dunque trovato l'unico punto critico $P = (-4, 2)$.

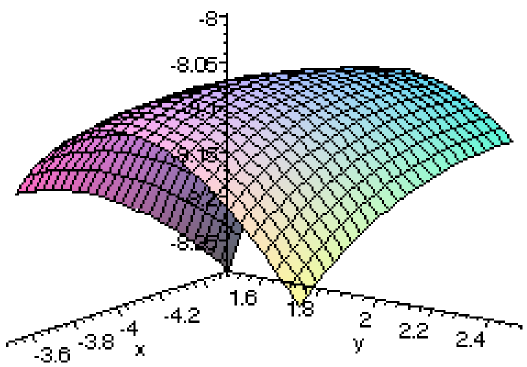
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{16}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2},$$

perciò l'Hessiano nel punto P è

$$H(-4, 2) = \begin{vmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0.$$

Poiché gli elementi sulla diagonale principale sono negativi, allora P è punto di massimo relativo.



A1 Si ha che $x = t^4$, quindi $dx = 4t^3\,dt$. Inoltre $t = \sqrt[4]{x}$ perciò i nuovi estremi d'integrazione sono 0 e $\sqrt[4]{3}$. Quindi

$$\int_0^3 \frac{\sqrt[4]{x}}{9 - \sqrt[2]{x}}\,dx = \int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{\sqrt[4]{t^4}}{9 - \sqrt[2]{t^4}} 4t^3\,dt = 4\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{t^4}{9 - t^2}\,dt$$

Operando la divisione tra polinomi si ottiene

$$t^4 = (9 - t^2)(-t^2 - 9) + 81,$$

perciò l'integrale diventa

$$4\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{t^4}{9 - t^2}\,dt = 4\int_0^{\sqrt[4]{3}} (-t^2 - 9)\,dt - 324\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{1}{t^2 - 9}\,dt.$$

Il polinomio $t^2 - 9$ ammette due radici $t_1 = -3$, $t_2 = 3$. Per trovare l'integrale, scomponiamo la funzione razionale nel seguente modo

$$\frac{1}{t^2-9} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-3} = \frac{(A+B)t + 3(B-A)}{(t+3)(t-3)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A+B=0, \\ 3B-3A=1. \end{cases}$$

Si ottiene $A = -1/6$, $B = 1/6$ quindi

$$\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{1}{t^2-9}\,dt = \frac{1}{6}\int_0^{\sqrt[4]{3}} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right) dt$$

perciò

$$\begin{aligned} 4\int_0^{\sqrt[4]{3}} (-t^2-9)\,dt - 324\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{1}{t^2-9}\,dt &= \left[-4\left(\frac{t^3}{3}+9t\right) - \frac{324}{6}\big(\ln|t-3| - \ln|t+3|\big)\right]_0^{\sqrt[4]{3}} \\ &= -\frac{4}{3}(\sqrt[4]{3})^3 - 36\sqrt[4]{3} + 54\ln\left|\frac{\sqrt[4]{3}+3}{\sqrt[3]{3}-3}\right| \end{aligned}$$

A2 a) Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto

$$a_n = \frac{3n\ln n - \ln(n^3+1)}{n^2+1}$$

bisogna dimostrare che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 2$. Appare chiaro che la disuguaglianza è vera per tutti gli n grandi ma non è immediato verificarlo per ogni $n \geq 2$. Ciò può essere fatto in vari modi. Ad esempio si può osservare che

$$3n\ln n - \ln(n^3+1) \geq 0 \iff \ln(n^{3n}) \geq \ln(n^3+1) \iff n^{3n} \geq n^3+1 \iff n^{3n} - n^3 - 1 \geq 0$$

Essendo $n^{3n} - n^3 - 1 \geq (n^3)^2 - n^3 - 1 \geq 0$ per ogni $n \geq 2$, si ha la tesi. Alternativamente, si potrebbe introdurre la funzione $k(x) = 3x\ln x - \ln(x^3+1)$ e verificare che $k(2) \geq 0$ e k è crescente per $x \geq 2$. La serie è dunque una serie a segni alterni.

Verifichiamo che il termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n\ln n - \ln(n^3+1)}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\ln n}{n} - \frac{\ln(n^3+1)}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0-0}{1} = 0.$$

Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{3x\ln x - \ln(x^3+1)}{x^2+1}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3\ln x + 3 - \frac{3x^2}{x^3+1})(x^2+1) - (3x\ln x - \ln(x^3+1))2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3\frac{x^3-x^2+1}{x^3+1}(x^2+1) + 2x\ln(x^3+1) + 3(1-x^2)\ln x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Si ha che $f'(x) \leq 0$ se e solo se

$$3\frac{x^3-x^2+1}{x^3+1}(x^2+1) + 2x\ln(x^3+1) + 3(1-x^2)\ln x \leq 0$$

Essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3\frac{x^3-x^2+1}{x^3+1}(x^2+1)+2x\ln(x^3+1)+3(1-x^2)\ln x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(3\frac{x^3-x^2+1}{x^3+1}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+2\frac{\ln(x^3+1)}{x}+3(\frac{1}{x^2}-1)\ln x\right)=\left[+\infty\cdot(3+0-\infty)\right]=-\infty$$

si deve avere $f'(x)\le 0$ definitivamente per $x\ge x_0$ per qualche x_0. Dunque la funzione f è decrescente per ogni ogni $x\ge x_0$ e di conseguenza $a_n\ge a_{n+1}$ per ogni $n\ge x_0$.

In conclusione, per il criterio di Leibniz la serie converge.

b) Utilizziamo il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$|a_n|\sim\frac{3n\ln n}{n^2}=\frac{3\ln n}{n}\ge\frac{3\ln 2}{n}.$$

La serie di termine generale $\frac{3\ln 2}{n}$ diverge quindi per confronto diverge anche la serie di termine generale $\frac{3\ln n}{n}$ e per asintoticità diverge anche quella di termine generale $|a_n|$. Dunque la serie data diverge assolutamente.

A3 L'insieme L_k di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y)=k$. Sul dominio, tale equazione equivale a

$$\ln\frac{2y+2x^2}{y+2x}=k\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{2y+2x^2}{y+2x}=e^k\qquad\Longleftrightarrow\qquad 2y+2x^2=e^k(y+2x)$$

Al variare di $k\in\mathbb{R}$, gli insiemi di livello L_k descrivono un fascio di parabole passanti per i punti intersezione di $y+x^2=0$ e $y+2x=0$, ottenuti come soluzioni di

$$\begin{cases} y+x^2=0\\ y+2x=0\end{cases}$$

che sono $P_1=(0,0)$ e $P_2=(2,-4)$. Chiaramente, di tali parabole va considerata solamente la parte che cade all'interno del dominio di g. Per ogni $k\neq\ln 2$ (per cui $e^k\neq 2$) si ha inoltre

$$2y+2x^2=e^k(y+2x)\qquad\Longleftrightarrow\qquad y=\frac{2}{e^k-2}x^2-\frac{2e^k}{e^k-2}x$$

quindi il vertice della parabola relativa a k è $V_k=(\frac{e^k}{2},\frac{e^{2k}}{2(2-e^k)})$. Le coordinate (x,y) del vertice, soddisfano allora

$$\begin{cases} x=\frac{e^k}{2}\\ y=\frac{e^{2k}}{4-2e^k}\end{cases}\quad\text{e sostituendo } e^k=2x \text{ nella seconda}\quad\Longrightarrow\quad y=\frac{x^2}{1-x}$$

In conclusione (per $k\neq\ln 2$) gli insiemi di livello L_k descrivono (la parte che cade nel dominio di g di) tutte le parabole che hanno il vertice sulla curva di equazione $y=\frac{x^2}{1-x}$ e che passano per P_1 e P_2. In particolare

$$L_0=\mathcal{D}_g\cap\{y=-2x^2+2x\}$$
$$L_{\ln 3}=\mathcal{D}_g\cap\{y=2x^2-6x\}$$

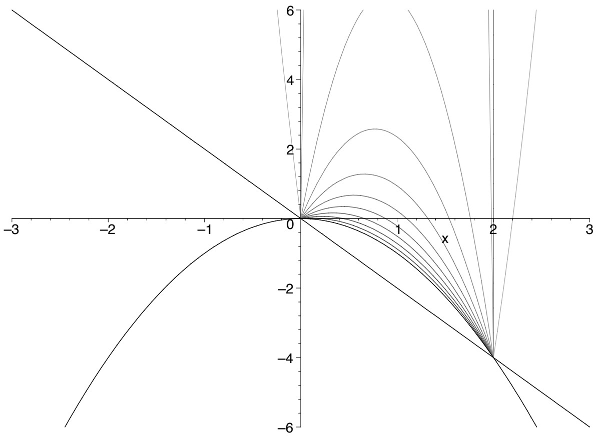
Il caso $k=\ln 2$ è speciale perché la variabile y si cancella e l'equazione $2y+2x^2=e^k(y+2x)$ diventa

$$2x^2-4x=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad x=0\text{ oppure }x=2$$

quindi

$$L_{\ln 2}=\mathcal{D}_g\cap\{x=0\text{ oppure }x=2\}$$

è dato dall'intersezione del dominio $\mathcal{D}_g$ della funzione g con le rette verticali $x=0$ e $x=2$.



Tema 4

B1 Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{4 - 3\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}, \qquad f_2(x) = \frac{2\sqrt{x} - x\mathrm{e}^{5x}}{x},$$

B2 Calcolare, utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito della funzione $f_3(x) = (2 - 3x^3)\ln x$.

B3 Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3n}}{2^{n^2}}, \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}\ \mathrm{arctg}(3n), \qquad \textbf{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n + 2}{4n^3 + 5n^5 + 1}.$$

B4 Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $g(x, y) = \ln(y - x^2) - \ln(y - x)$.

B5 Determinare il dominio e i punti critici della funzione $h(x, y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x} - x - 2$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

A1 Si calcoli mediante la sostituzione $x = t^6$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x} - 4\right)}\,dx$$

A2 Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n\ln n - \ln(n+1)}{n^2 + 2},$$

a) studiare la convergenza semplice utilizzando, dopo averne verificato le ipotesi, il criterio di Leibniz;

b) provare che la serie diverge assolutamente.

A3 Descrivere geometricamente le linee di livello dell'esercizio B4, e rappresentare graficamente quelle di livello $\ln(1/2)$, 0 e $\ln 2$.

Soluzioni del Tema 4

B1

$$\int \frac{4-3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = 4\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + 3\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = 4\operatorname{tg} x - \frac{3}{\cos x} + c.$$

$$\int \frac{2\sqrt{x}-xe^{5x}}{x}\,dx = 2\int x^{-1/2}\,dx - \int e^{5x}\,dx = 4\sqrt{x} - \frac{1}{5}e^{5x} + c.$$

B2 Applicando il metodo per parti si ottiene

$$\int (2-3x^3)\ln x\,dx = \left(2x - \frac{3}{4}x^4\right)\ln x - \int \left(2x - \frac{3}{4}x^4\right)\frac{1}{x}\,dx = \left(2x - \frac{3}{4}x^4\right)\ln x - \int \left(2 - \frac{3}{4}x^3\right)dx$$
$$= \left(2x - \frac{3}{4}x^4\right)\ln x - 2x + \frac{3}{16}x^4 + c.$$

B3a Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{3n}}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0 < 1.$$

Dunque la serie converge.

B3b Applicando il criterio necessario si vede che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n^2}\operatorname{arctg}(3n) = 1\cdot\frac{\pi}{2} \neq 0,$$

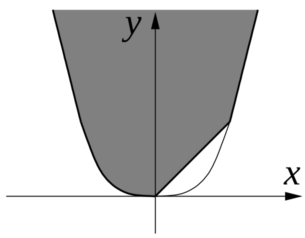
quindi la serie non converge e, più precisamente, essendo a termini positivi, diverge.

B3c Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{3n^2}{5n^5} = \frac{3}{5n^3}$ che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è convergente.

B4 a) Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D}_g = \left\{(x,y):\ y-x^2>0,\ y-x>0\right\},$$

ed è dunque la regione ottenuta come intersezione del semipiano superiore di supporto la retta $y=x$ e la regione convessa individuata dalla parabola di equazione $y=x^2$.



B5 Il dominio è dato da $\mathcal{D} = \{(x,y):\ x\neq 0, y\neq 0\}$ ed è quindi $\mathbb{R}^2$ tranne gli assi cartesiani.

I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2} - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2, \\ x = -y^2. \end{cases}$$

Sostituendo la prima nella seconda si ottiene $x=-x^4$ e dividendo per x (che è non nullo sul dominio) si ha $x^3=-1$ la cui unica soluzione è $x=-1$. Sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene $y=1$. Abbiamo dunque trovato l'unico punto critico $P=(-1,1)$.

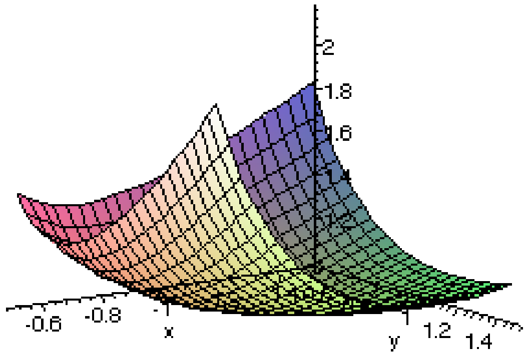
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2y}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{1}{x^2},$$

perciò l'Hessiano nel punto P è

$$H(-1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Poiché gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, allora P è punto di minimo relativo.



A1 Si ha che $x = t^6$, quindi $dx = 6t^5\,dt$. Inoltre $t = \sqrt[6]{x}$ perciò i nuovi estremi d'integrazione sono 1 e $\sqrt[6]{2}$. Quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-4\right)}\,dx = \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{\sqrt[6]{t^6}\left(\sqrt[3]{t^6}-4\right)} 6t^5\,dt = 6\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t^4}{t^2-4}\,dt$$

Operando la divisione tra polinomi si ottiene

$$t^4 = (t^2-4)(t^2+4) + 16,$$

perciò l'integrale diventa

$$6\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t^4}{t^2-4}\,dt = 6\int_1^{\sqrt[6]{2}} (t^2+4)\,dt + 96\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{t^2-4}\,dt.$$

Il polinomio t^2-4 ammette due radici $t_1 = -2$, $t_2 = 2$. Per trovare l'integrale, scomponiamo la funzione razionale nel seguente modo

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{(A+B)t + 2(B-A)}{(t+2)(t-2)} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A+B=0, \\ 2B-2A=1. \end{cases}$$

Si ottiene $A = -1/4$, $B = 1/4$ quindi

$$\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{t^2-4}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt[6]{2}} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)\,dt$$

perciò

$$\begin{aligned} 6\int_1^{\sqrt[6]{2}} (t^2+4)\,dt + 96\int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{t^2-4}\,dt &= \left[6\left(\frac{t^3}{3}+4t\right) + \frac{96}{4}\left(\ln|t-2| - \ln|t+2|\right)\right]_1^{\sqrt[6]{2}} \\ &= 2\sqrt{2} + 24\sqrt[6]{2} - 26 + 24\ln\left|\frac{\sqrt[6]{2}-2}{\sqrt[6]{2}+2}\right| + 24\ln 3 \end{aligned}$$

A2 a) Per studiare la convergenza semplice applichiamo il criterio di Leibniz: verifichiamo innanzitutto che la serie è effettivamente a segni alterni. Posto

$$a_n = \frac{n \ln n - \ln(n+1)}{n^2+2}$$

bisogna dimostrare che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 2$. Appare chiaro che la disuguaglianza è vera per tutti gli n grandi ma non è immediato verificarlo per ogni $n \geq 2$. Ciò può essere fatto in vari modi. Ad esempio si può osservare che

$$n \ln n - \ln(n+1) \geq 0 \iff \ln(n^n) \geq \ln(n+1) \iff n^n \geq n+1 \iff n^n - n - 1 \geq 0$$

Essendo $n^n - n - 1 \geq n^2 - n - 1 \geq 0$ per ogni $n \geq 2$, si ha la tesi. Alternativamente, si potrebbe introdurre la funzione $k(x) = x \ln x - \ln(x+1)$ e verificare che $k(2) \geq 0$ e k è crescente per $x \geq 2$. La serie è dunque una serie a segni alterni.

Verifichiamo che il termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n - \ln(n+1)}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+1)}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{0-0}{1}.$$

Rimane solo da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{x \ln x - \ln(x+1)}{x^2+2}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1 - \frac{1}{x+1})(x^2+2) - (x \ln x - \ln(x+1))2x}{(x^2+2)^2} = \frac{\frac{x(x^2+2)}{x+1} + 2x\ln(x+1) + (2-x^2)\ln x}{(x^2+2)^2}$$

Si ha che $f'(x) \leq 0$ se e solo se

$$\frac{x(x^2+2)}{x+1} + 2x\ln(x+1) + (2-x^2)\ln x \leq 0$$

Essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x(x^2+2)}{x+1} + 2x\ln(x+1) + (2-x^2)\ln x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{x(x^2+2)}{x^2(x+1)} + 2\frac{\ln(x+1)}{x} + (\frac{2}{x^2} - 1)\ln x\right) = \big[+\infty \cdot (1 + 0 - \infty)\big] = -\infty$$

si deve avere $f'(x) \leq 0$ definitivamente per $x \geq x_0$ per qualche x_0. Dunque la funzione f è decrescente per ogni ogni $x \geq x_0$ e di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq x_0$.

In conclusione, per il criterio di Leibniz la serie converge.

b) Utilizziamo il criterio del confronto e il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$|a_n| \sim \frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln 2}{n}.$$

La serie di termine generale $\frac{\ln 2}{n}$ diverge quindi per confronto diverge anche la serie di termine generale $\frac{\ln n}{n}$ e per asintoticità diverge anche quella di termine generale $|a_n|$. Dunque la serie data diverge assolutamente.

A3 L'insieme L_k di livello k si ottiene risolvendo l'equazione $f(x,y) = k$. Sul dominio, tale equazione equivale a

$$\ln \frac{y-x^2}{y-x} = k \iff \frac{y-x^2}{y-x} = e^k \iff y - x^2 = e^k(y-x)$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli insiemi di livello L_k descrivono un fascio di parabole passanti per i punti intersezione di $y - x^2 = 0$ e $y - x = 0$, ottenuti come soluzioni di

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

che sono $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (1, 1)$. Chiaramente, di tali parabole va considerata solamente la parte che cade all'interno del dominio di g. Per ogni $k \neq 0$ (per cui $\mathrm{e}^k \neq 1$) si ha inoltre

$$y - x^2 = \mathrm{e}^k (y - x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^k} x^2 - \frac{\mathrm{e}^k}{1 - \mathrm{e}^k} x$$

quindi il vertice della parabola relativa a k è $V_k = (\frac{\mathrm{e}^k}{2}, \frac{\mathrm{e}^{2k}}{4(\mathrm{e}^k - 1)})$. Le coordinate (x, y) del vertice, soddisfano allora

$$\begin{cases} x = \frac{\mathrm{e}^k}{2} \\ y = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{4\mathrm{e}^k - 4} \end{cases} \qquad \text{e sostituendo } \mathrm{e}^k = 2x \text{ nella seconda} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{x^2}{2x - 1}$$

In conclusione (per $k \neq 0$) gli insiemi di livello L_k descrivono (la parte che cade nel dominio di g di) tutte le parabole che hanno il vertice sulla curva di equazione $y = \frac{x^2}{2x-1}$ e che passano per P_1 e P_2. In particolare

$$L_{\ln(1/2)} = \mathcal{D}_g \cap \{y = 2x^2 - x\}$$

$$L_{\ln 2} = \mathcal{D}_g \cap \{y = -x^2 + 2x\}$$

Il caso $k = 0$ è speciale perché la variabile y si cancella e l'equazione $y - x^2 = \mathrm{e}^k (y - x)$ diventa

$$x^2 - x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \text{ oppure } x = 1$$

quindi

$$L_0 = \mathcal{D}_g \cap \{x = 0 \text{ oppure } x = 1\}$$

è dato dall'intersezione del dominio $\mathcal{D}_g$ della funzione g con le rette verticali $x = 0$ e $x = 1$.