Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Analisi Matematica

Appello del 19 settembre 2005

Cognome e Nome | Matricola

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Consegnare anche il presente testo.

1 Risolvere i seguenti limiti

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(x^2+2)}{\mathrm{e}^{(x^2-x)}-1}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2-3x)-5\ln(1-3x^2)}{2x^3\mathrm{e}^x-\operatorname{arctg}(3x)}.$$

2 Data la funzione $f(x)=\dfrac{x}{x^4+1}$

a) trovare il dominio di definizione e studiare il segno della funzione; **b)** calcolare, qualora esistano, i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti; **c)** calcolare la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o globale della funzione; **d)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **e)** tracciare l'andamento qualitativo del grafico di f.

3 Calcolare i seguenti integrali

$$\textbf{a)}\ \int x(\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x^2})\,dx, \qquad \textbf{b)}\ \int x^2\sqrt{2x^2+1}\,dx.$$

Per il secondo utilizzare, ad esempio, la sostituzione $x=\dfrac{1-2t^2}{4t}$, con $t>0$.

4 Si studi la convergenza delle serie

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2n+n^2)-1}{3n^4-n^3+5}, \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-5\operatorname{arctg}(n^2)}{\sqrt{n^4+2n}+3}$$

5 Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $h(x,y)=\operatorname{arcsen}(x+1)-\ln(4-y-x^2)$.

6 Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 in $x_0=0$ della funzione $g(x)=x\mathrm{e}^{2x}$.

Punteggi: 3+3, 1+1+3+2+2, 3+5, 2+4, 2, 3

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 19 settembre 2005

1a Il limite si presenta nella forma $[\frac{1-\ln 2}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 0$. Il numeratore tende a $1 - \ln 2 > 0$ quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere positivo in un intorno di 0. Poiché $e^z > 1$ se e solo se $z > 0$, allora $e^{(x^2-x)} - 1 > 0$ se e solo se $x^2 - x > 0$ cioè $x < 0$ oppure $x > 2$. Quindi il denominatore è negativo in un intorno destro di 0 e positivo in un intorno sinistro di 0. Si conclude che

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1 - \ln(x^2 + 2)}{e^{(x^2-x)} - 1} = \left[\frac{1 - \ln 2}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

dunque il limite non esiste.

1b Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 3x) - 5\ln(1 - 3x^2)}{2x^3 e^x - \operatorname{arctg}(3x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2x - 3)\cos(x^2 - 3x) - 5\frac{-6x}{1-3x^2}}{6x^2 e^x + 2x^3 e^x - \frac{3}{1+9x^2}} = \left[\frac{-3 - 0}{0 + 0 - 3}\right] = 1.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 1 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$e^x = 1 + x + o(x), \qquad \ln(1 + x) = x + o(x), \qquad \operatorname{sen} x = x + o(x), \qquad \operatorname{arctg} x = x + o(x),$$

si ottiene

$$\operatorname{sen}(x^2 - 3x) = x^2 - 3x + o(x^2 - 3x) = -3x + o(x), \qquad \operatorname{arctg}(3x) = 3x + o(x),$$

$$\ln(1 - x^2) = -x^2 + o(-x^2) = o(x), \qquad x^3 e^x = o(x).$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\text{Num}(x)$ è

$$\text{Num}(x) = -3x + o(x) - o(x) = -3x + o(x),$$

e quello del denominatore $\text{Den}(x)$ è

$$\text{Den}(x) = o(x) - (3x + o(x)) = -3x + o(x).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 3x) - 5\ln(1 - 3x^2)}{2x^3 e^x - \operatorname{arctg}(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x + o(x)}{-3x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3 + \frac{o(x)}{x}}{-3 + \frac{o(x)}{x}} = 1.$$

Il limite richiesto vale allora 1.

2 **a)** Il dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Il denominatore è sempre positivo quindi la funzione è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$ e si annulla in $x = 0$.

b) Ha senso andare a calcolare i limiti a $+\infty$ e $-\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^4 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3 + 1/x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0.$$

Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e $-\infty$.

c) La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{x^4 + 1 - x4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{1 - 3x^4}{(x^4 + 1)^2}.$$

La derivata è positiva quando $1 - 3x^4 \geq 0$ cioè $-1/\sqrt[4]{3} \leq x \leq 1/\sqrt[4]{3}$, quindi

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}[, \\ = 0, & \text{se } x = -1/\sqrt[4]{3} \text{ oppure } x = 1/\sqrt[4]{3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/\sqrt[4]{3}[\cup]1/\sqrt[4]{3}, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente in $]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}[$, decrescente in $]-\infty, -1/\sqrt[4]{3}[$ e in $]1/\sqrt[4]{3}, +\infty[$. In $x = -1/\sqrt[4]{3}$ e $x = 1/\sqrt[4]{3}$ ha un punto di minimo e un punto di massimo, rispettivamente.

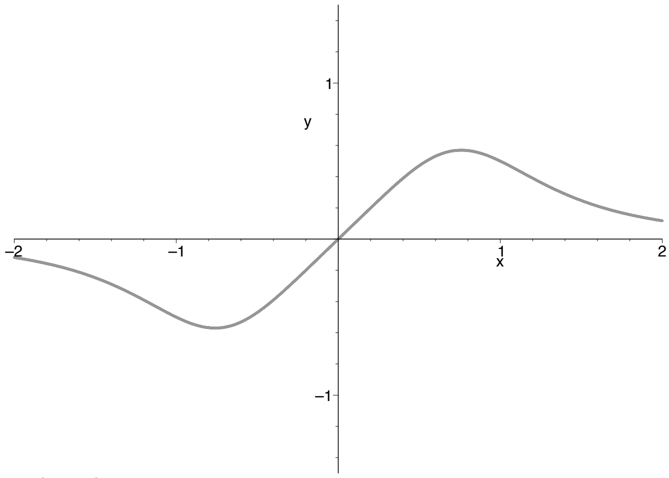
d) La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-12x^3(x^4+1)^2 - (1-3x^4)2(x^4+1)4x^3}{(x^4+1)^4} = \frac{-12x^3(x^4+1) - (1-3x^4)8x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{4x^3(3x^4-5)}{(x^4+1)^3}.$$

La derivata seconda è positiva quando $x^3(3x^4 - 5) \geq 0$ cioè $x \geq \sqrt[4]{5/3}$ oppure $-\sqrt[4]{5/3} \leq x \leq 0$. Ricapitolando

$$f''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt[4]{5/3}, 0[\cup]\sqrt[4]{5/3}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt[4]{5/3} \text{ oppure } x = \sqrt[4]{5/3}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt[4]{5/3}[\cup]0, \sqrt[4]{5/3}[, \end{cases}$$

quindi la funzione è convessa in $]-\sqrt[4]{5/3}, 0[$ e in $]\sqrt[4]{5/3}, +\infty[$, concava in $]-\infty, -\sqrt[4]{5/3}[$ e in $]0, \sqrt[4]{5/3}[$.



3a Per la proprietà di linearità si ha

$$\int x(e^x + 3e^{-x^2})\, dx = \int xe^x\, dx + 3\int xe^{-x^2}\, dx.$$

Il secondo integrale può essere scritto nella forma

$$3\int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{3}{2}\int (-2x)e^{-x^2}\, dx = -\frac{3}{2}\int (-x^2)'e^{-x^2}\, dx = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + c,$$

con c costante d'integrazione. Il primo integrale si risolve per parti:

$$\int xe^x = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + c.$$

In definitiva

$$\int x(e^x + 3e^{-x^2})\, dx = (x-1)e^x - \frac{3}{2}e^{-x^2} + c.$$

3b Se $t > 0$ si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t(4t) - (1-2t^2)4}{16t^2} = -\frac{1+2t^2}{4t^2},$$

$$\sqrt{2x^2+1} = \sqrt{2\big(\frac{1-2t^2}{4t}\big)^2+1} = \sqrt{2\frac{(1+2t^2)^2}{16t^2}} = \sqrt{2}\frac{1+2t^2}{4t},$$

quindi, operando la sostituzione, si ottiene

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{2x^2+1}\,dx &= \int \big(\frac{1-2t^2}{4t}\big)^2\sqrt{2}\frac{1+2t^2}{4t}\big(-\frac{1+2t^2}{4t^2}\big)\,dt = -\frac{\sqrt{2}}{256}\int \frac{(1-2t^2)^2(1+2t^2)^2}{t^5}\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{256}\int \frac{(1-4t^4)^2}{t^5}\,dt = -\frac{\sqrt{2}}{256}\int \big(\frac{1}{t^5}-\frac{8}{t}+16t^3\big)\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{256}\big(-\frac{1}{4t^4}-8\ln t+4t^4\big)+c.\end{aligned}$$

Infine bisogna sostituire t in funzione di x utilizzando la sostituzione inversa di quella data:

$$x = \frac{1-2t^2}{4t} \qquad\Longleftrightarrow\qquad 2t^2+4xt-1=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad t=\frac{\sqrt{4x^2+2}-2x}{2},$$

dove nell'ultimo passaggio, per selezionare la corretta radice dell'equazione di secondo grado $2t^2+4xt-1=0$, si è utilizzata la condizione $t>0$. In conclusione si ottiene

$$\int x^2\sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{256}\Big(\frac{4}{(\sqrt{4x^2+2}-2x)^4}+8\ln\big(\frac{\sqrt{4x^2+2}-2x}{2}\big)-4\big(\frac{\sqrt{4x^2+2}-2x}{2}\big)^4\Big)+c.$$

4a Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{n^3}{3n^4} = \frac{1}{3n}$ che è il termine generale di una serie divergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è divergente.

4b Proviamo ad applicare il criterio della convergenza assoluta. Poiché $\lim_{n\to+\infty}\operatorname{arctg}(n^2)=\pi/2$ e $\sqrt{n^4+2n}\sim n^2$, si ha

$$|(-1)^n a_n| = \frac{n-5\operatorname{arctg}(n^2)}{\sqrt{n^4+2n}+3} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

termine generale di una serie divergente. Dunque, per asintoticità, la serie data diverge assolutamente. Ciò non ci dice nulla, però, della convergenza semplice.

La serie è definitivamente a segni alterni, infatti

$$\lim_{n\to+\infty}(n-5\operatorname{arctg}(n^2)) = +\infty,$$

dunque, definitivamente $n-5\operatorname{arctg}(n^2)>0$ per tutti gli n sufficientemente grandi. Osserviamo che ciò non è vero per tutti gli n essendo, ad esempio, $a_1, a_2 < 0$. Proviamo quindi ad applicare il criterio di Leibniz. Innanzitutto il termine generale è banalmente infinitesimo, infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-5\operatorname{arctg}(n^2)}{\sqrt{n^4+2n}+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-5\frac{\operatorname{arctg}(n^2)}{n}}{\sqrt{n^2+2/n}+3/n} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0.$$

Rimarrebbe quindi da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi, che, sebbene possibile da provare, comporta però molti calcoli.

Un modo più conveniente, e la seguente semplificazione poteva essere fatta fin dall'inizio, è osservare che il termine generale della serie si può scrivere nel seguente modo

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+2n}+3} - \frac{5\operatorname{arctg}(n^2)}{\sqrt{n^4+2n}+3} =: b_n - c_n.$$

Poiché $c_n \sim 5\pi/2n^2$, la serie di termine generale $(-1)^n c_n$ è (assolutamente) convergente. Per la proprietà di linearità delle serie, per provare la convergenza della serie data, è allora sufficiente provare la convergenza della serie di termine generale $(-1)^n b_n$. Tale serie è ancora a segni alterni e con termine generale infinitesimo. Per applicare il Criterio di Leibniz, rimane dunque da verificare che $b_n \geq b_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi, che è sicuramente più semplice da provare rispetto all'analoga disuguaglianza per a_n. A questo punto conviene introdurre la funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+2x}+3}$ tale che $b_n = f(n)$. Per provare la monotonia di b_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

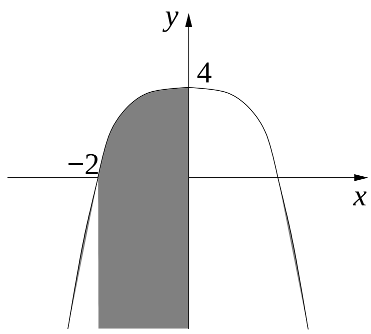
$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^4+2x}+3) - x\frac{4x^3+2}{2\sqrt{x^4+2x}}}{(\sqrt{x^4+2x}+3)^2} = \frac{x + 3\sqrt{x^4+2x} - x^4}{\sqrt{x^4+2x}\,(\sqrt{x^4+2x}+3)^2},$$

e poiché il denominatore è positivo e il numeratore tende a $-\infty$ quando x tende a $+\infty$, allora la derivata prima è definitivamente negativa per tutti gli x sufficientemente grandi, quindi f è definitivamente decrescente e, di conseguenza $b_n \geq b_{n+1}$ per ogni n sufficientemente grande. In conclusione, per il criterio di Leibniz la serie converge.

5 Il dominio della funzione è dato da

$$\mathcal{D}_h = \big\{(x,y) : \ -1 \leq x+1 \leq 1, \ 4 - y - x^2 > 0\big\} = \big\{(x,y) : \ -2 \leq x \leq 0, \ y < -x^2 + 4\big\}.$$

e rappresenta dunque la regione del piano ottenuta come intersezione della regione convessa individuata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4$ e della striscia di piano compresa tra $x = -2$ e $x = 0$.



6 Si ha

$$g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}, \qquad g''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}, \qquad g'''(x) = 8e^{2x} + 4e^{2x} + 8xe^{2x}.$$

Quindi $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 4$, $g'''(0) = 12$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 = x + 2x^2 + 2x^3.$$

Alternativamente, si può sfruttare lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2),$$

per cui

$$xe^{2x} = x\big(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2)\big) = x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

Dall'unicità dello sviluppo segue nuovamente che $P_3(x) = x + 2x^2 + 2x^3$.