Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Analisi Matematica

Appello del 6 settembre 2005

Cognome e Nome — Matricola

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Consegnare anche il presente testo.

1 Risolvere i seguenti limiti

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x - x^2) - x\mathrm{e}^{3x}}{4\operatorname{tg} x + x\cos x - 2\sqrt[3]{x^5}}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 3\operatorname{sen}(\pi x)}{x\ln(2-x)}.$$

2 Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$

a) trovare il dominio di definizione; **b)** calcolare, qualora esistano, i limiti agli estremi del dominio; **c)** determinare gli eventuali asintoti; **d)** calcolare la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o globale della funzione; **e)** dire se la funzione è derivabile in $x = 2$ e trovare, se esiste, la retta tangente al grafico nel punto $(2, f(2))$; **f)** tracciare l'andamento qualitativo del grafico di f.

3 Si calcolino i seguenti integrali

$$\textbf{a)}\ \int \big(\sqrt{1-x^2} + x\big)\sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad \textbf{b)}\ \int \ln\left(\frac{2+x}{x-1}\right)\,dx.$$

4 Si studi la convergenza delle serie

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 5n + 3n^2 + 1}{7n^4 + 3 + 4n^5}, \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{sen}\Big(\frac{2}{\sqrt{n^3+n}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cos\frac{1}{n^3}\Big)$$

5 Data la funzione $h(x,y) = \dfrac{x^3}{27} + 8y^3 - \dfrac{2}{3}xy + 1$, trovare i punti critici di h e dire se sono max/min relativi o punti di sella.

6 Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 3 in $x_0 = 0$ della funzione $g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

Punteggi: 3+3, 1+2+3+3+3+1, 3+4, 2+4, 3, 2

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 6 settembre 2005

$\boxed{\textbf{1a}}$ Osserviamo che $\sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$. Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x - x^2) - x\mathrm{e}^{3x}}{4\operatorname{tg} x + x\cos x - 2x^{5/3}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x - x^2)(3 - 2x) - \mathrm{e}^{3x} - 3x\mathrm{e}^{3x}}{\frac{4}{\cos^2 x} + \cos x - x\operatorname{sen} x - 2\frac{5}{3}x^{2/3}} = \left[\frac{3 - 1 - 0}{4 + 1 - 0 - 0}\right] = \frac{2}{5}.$$

Il limite richiesto vale allora $2/5$.

$\boxed{\textbf{1b}}$ Il limite si presenta nella forma $[\frac{2}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 1$. Il numeratore tende a 2 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, è negativo in un intorno di 1. Poiché $\ln z > 0$ se $z > 1$, allora $\ln(2 - x)$ è positivo se $x < 1$ e negativo se $x > 1$, con x vicino a 1. Allora il denominatore è negativo in un intorno destro di 1 e positivo in un intorno sinistro di 1. Si conclude che

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{2x^2 - 3\operatorname{sen}(\pi x)}{x\ln(2 - x)} = \left[\frac{2}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

dunque il limite non esiste.

$\boxed{\textbf{2}}$ **a)** Affinché la funzione sia definita, l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, quindi

$$x^2 - \frac{8}{x} \geq 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x^3 - 8}{x} \geq 0, \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 0 \text{ oppure } x \geq 2,$$

(essendo $x^3 - 8 \geq 0$ se e solo se $x \geq 2$.) Quindi il dominio è $\mathcal{D} =]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$. Osserviamo che la funzione è banalmente sempre positiva e si annulla solamente in $x = 2$ che dunque risulta un punto di minimo (assoluto).

b) Ha senso andare a studiare i limiti in $x = 0$ da sinistra, a $+\infty$ e a $-\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = [\sqrt{+\infty - 0}] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = \left[\sqrt{0 - \frac{2}{0^-}}\right] = [\sqrt{0 + \infty}] = +\infty.$$

c) Dal limite appena calcolato si deduce che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale. Cerchiamo, se esiste, l'asintoto a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{8}{x^3}} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2 - \frac{8}{x}) - x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{x\big(\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} + x\big)} = 0,$$

quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

Per quanto riguarda l'asintoto a $-\infty$, bisogna portare attenzione al fatto che, quando x è negativo, $x = -|x| = -\sqrt{x^2}$ (ovvero, detto brevemente, per portare x dentro la radice bisogna cambiare il segno). Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 - \frac{8}{x^3}} = -1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) + x\big) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2 - \frac{8}{x}) - x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{x\big(\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}} - x\big)} = 0,$$

quindi la retta $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

d) La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}}\left(2x + \frac{8}{x^2}\right) = \frac{x^3+4}{\sqrt{x^3(x^3-8)}},$$

quindi $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^3 + 4 \geq 0$ ovvero $x \geq -\sqrt[3]{4}$. Osserviamo che la formula della derivata prima non vale per $x = 2$ (vedi anche il punto e)). Ricapitolando

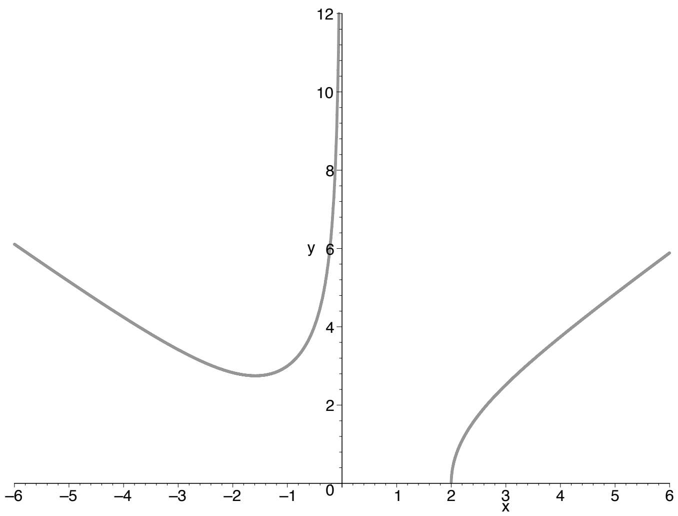
$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\sqrt[3]{4}, 0[\cup]2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -\sqrt[3]{4}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -\sqrt[3]{4}[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente su $]-\sqrt[3]{4}, 0[$ e su $[2, +\infty[$, decrescente su $]-\infty, -\sqrt[3]{4}[$. In $x = -\sqrt[3]{4}$ ha un punto di minimo relativo, in $x = 2$, come già osservato, ha un punto di minimo assoluto. Dallo studio dei limiti si vede che la funzione è non-limitata superiormente.

e) La formula per la derivata prima, di cui al punto d), non vale per $x = 2$. A priori, però, ciò non è sufficiente per affermare che ivi la derivata non esiste. Invece, è necessario utilizzare la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, che in questo caso diventa

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 8/x}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^3-8}{x(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x(x-2)}} = +\infty.$$

Dunque, essendo tale limite infinito, la derivata effettivamente non esiste, ma, proprio poiché il limite è $+\infty$, la retta tangente invece esiste ed è verticale, di equazione $x = 2$.



$\boxed{\textbf{3a}}$

$$\int \left(\sqrt{1-x^2} + x\right)\sqrt{1-x^2}\, dx = \int (1-x^2)\, dx + \int x\sqrt{1-x^2}\, dx = x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{1/2}\, dx$$
$$= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} + c = x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + c.$$

3b Osservando che $\ln\left(\frac{2+x}{x-1}\right) = \ln(x+2) - \ln(x-1)$ e applicando il metodo per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(\frac{2+x}{x-1}\right) dx &= x\ln\left(\frac{2+x}{x-1}\right) - \int \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1}\,dx \\
&= x\ln\left(\frac{2+x}{x-1}\right) - \int \frac{(x+2)-2}{x+2} - \frac{(x-1)+1}{x-1}\,dx \\
&= x\ln\left(\frac{2+x}{x-1}\right) + \int \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= x\ln\left(\frac{2+x}{x-1}\right) + 2\ln(x+2) + \ln(x-1) + c,
\end{aligned}$$

con c costante arbitraria.

4a Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{n^3}{4n^5} = \frac{1}{4n^2}$ che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è convergente.

4b Studiamo l'asintoticità del termine generale. Poiché $\sqrt{n^3+n} \sim n^{3/2}$, dagli sviluppi di Taylor in $x_0 = 0$ delle funzioni coinvolte

$$\operatorname{sen} x = x + o(x), \qquad \cos x = 1 + o(x), \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + o(x),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{2}{\sqrt{n^3+n}} &\sim \operatorname{sen}\frac{2}{n^{3/2}} \sim \frac{2}{n^{3/2}}, \\
\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cos\frac{1}{n^3} &\sim \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

e in definitiva

$$a_n \sim n \cdot \frac{2}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n},$$

che è il termine generale di una serie (armonica) divergente, quindi per il criterio di asintoticità, anche la serie data è divergente.

5 Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$. I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3x^2}{27} - \dfrac{2}{3}y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - \dfrac{2}{3}x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 6y = 0, \\ 36y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $y = x^2/6$ che sostituita nella seconda porta all'equazione $x^4 - x = 0$. Quest'ultima equivale a $x(x^3-1) = 0$ e ha dunque le soluzioni $x = 0$ (corrispondentemente $y = 0$) e $x = 1$ (corrispondentemente $y = 1/6$). Si ottengono così i due punti critici $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1, 1/6)$.

Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{9}x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{3}.$$

L'Hessiano nel punto P_1 è

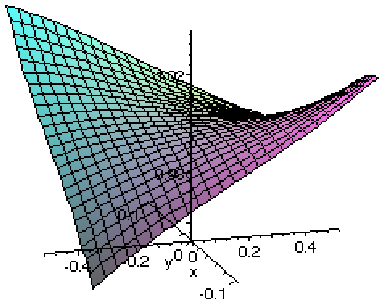
$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -2/3 \\ -2/3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{4}{9} < 0,$$

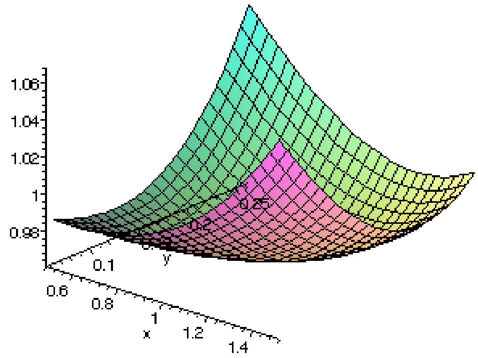
quindi è un punto di sella.

L'Hessiano nel punto P_2 è

$$H(1,1/6) = \begin{vmatrix} 2/9 & -2/3 \\ -2/3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} > 0,$$

e poiché gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, P_2 è punto di minimo relativo.





6 Si ha

$$g'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}, \qquad g''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}, \qquad g'''(x) = -\frac{48}{(2x+1)^4}.$$

Quindi $g(0) = 1$, $g'(0) = -2$, $g''(0) = 8$, $g'''(0) = -48$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = 1 - 2x + \frac{8}{2!}x^2 + \frac{-48}{3!}x^3 = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3.$$

Un altro modo di ottenere il risultato è utilizzare un'opportuna serie geometrica. Ricordiamo che per $|k| < 1$ la serie geometrica di ragione k converge e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}.$$

Scrivendo la formula di Taylor di g, si può supporre che la variabile x sia vicina a $x_0 = 0$, in particolare che $|2x| < 1$. Quindi

$$\frac{1}{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \dots$$

Poiché $x^n = o(x^3)$ per ogni $n > 3$, si può dimostrare che anche la "coda" della serie è un $o(x^3)$, perciò si ottiene lo sviluppo

$$\frac{1}{2x+1} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + o(x^3),$$

e dall'unicità degli sviluppi si ha nuovamente $P_3(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3$.