Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Analisi Matematica

Appello del 20 luglio 2005

Cognome e Nome — Matricola

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Consegnare anche il presente testo.

1 Risolvere i seguenti limiti

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^5\ln(x-1)-\mathrm{e}^{2x}}{x\,\mathrm{sen}(\pi x)},\qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(2x+x^3)-5\ln(1+x)}{4x^2-1+\mathrm{e}^x\cos x}.$$

2 Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$

a) trovare il dominio di definizione e i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare il segno della funzione; **c)** determinare gli eventuali asintoti; **d)** calcolare la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o globale della funzione; **e)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **f)** tracciare l'andamento qualitativo del grafico di f.

3 Si calcoli, utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito di $g(x)=\mathrm{e}^{-2x}\cos(3x)$.

4 Si studi la convergenza delle serie

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3+2n+7}{7n^4+n^6+1},\qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^2+n+1}$$

5 Data la funzione $h(x,y)=x^4+2x^3y+x^2+y^2$, trovare i punti critici di h e dire se sono max/min relativi o punti di sella.

6 Si calcolino i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni

$$\textbf{a)}\ g_1(x)=\mathrm{e}^{x-x^2}\ \text{di ordine 3 in}\ x_0=0,$$

$$\textbf{b)}\ g_2(x)=x^2\big(\mathrm{arctg}(x^2\mathrm{e}^x)-\mathrm{sen}(x-2\ln(1+x^2))\big)\ \text{di ordine 5 in}\ x_0=0.$$

Per la seconda funzione si consiglia di utilizzare gli sviluppi di Taylor.

Punteggi: 3+3, 9, 3, 2+3, 4, 3+5

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 20 luglio 2005

$\boxed{\textbf{1a}}$ Il limite si presenta nella forma $[\frac{-e^4}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 2$. Il numeratore tende a $-e^4$ quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere negativo in un intorno di 2. Poiché $\operatorname{sen} z > 0$ se $2\pi < z < 5\pi/2$ e $\operatorname{sen} z < 0$ se $3\pi/2 < z < 2\pi$, allora il denominatore è positivo se $x > 2$ e negativo se $x < 2$, con x vicino a 2. Allora il denominatore è negativo in un intorno sinistro di 2 e positivo in un intorno destro di 2. Si conclude che

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^5 \ln(x-1) - e^{2x}}{x \operatorname{sen}(\pi x)} = \left[\frac{-e^4}{0^\pm}\right] = \mp\infty,$$

dunque il limite non esiste.

$\boxed{\textbf{1b}}$ Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x + x^3) - 5\ln(1+x)}{4x^2 - 1 + e^x \cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2+3x^2)\cos(2x+x^3) - 5\frac{1}{1+x}}{8x + e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x} = \left[\frac{2-5}{0+1-0}\right] = -3.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 1 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$e^x = 1 + x + o(x), \qquad \ln(1+x) = x + o(x), \qquad \operatorname{sen} x = x + o(x), \qquad \cos x = 1 + o(x),$$

si ottiene

$$\operatorname{sen}(2x - x^3) = (2x - x^3) + o(2x - x^3) = 2x + o(x),$$
$$e^x \cos x = (1 + x + o(x))(1 + o(x)) = 1 + x + o(x).$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ è

$$\mathrm{Num}(x) = 2x + o(x) - 5(x + o(x)) = -3x + o(x),$$

e quello del denominatore $\mathrm{Den}(x)$, osservando che $4x^2 = o(x)$, è

$$\mathrm{Den}(x) = o(x) - 1 + (1 + x + o(x)) = x + o(x).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x + x^3) - 5\ln(1+x)}{4x^2 - 1 + e^x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3 + \frac{o(x)}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} = -3.$$

Il limite richiesto vale allora -3.

$\boxed{\textbf{2}}$ **a)** Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - \frac{1}{x^2}\right) = [\pm\infty - 0] = \pm\infty.$$

Quindi la retta $x = 0$ è un asintoto verticale.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo, la funzione è ≥ 0 se e solo se $x^3 - 1 \geq 0$ cioè $x \geq 1$. Ricapitolando:

$$f(x) \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \\ = 0, & \text{se } x = 1, \\ > 0, & \text{se } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

c) Cerchiamo gli asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-1}{x^3} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-x\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

d) La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{3x^2x^2-(x^3-1)2x}{x^4} = \frac{x^4+2x}{x^4} = \frac{x^3+2}{x^3}.$$

Il denominatore è positivo quando $x > 0$. Il numeratore è ≥ 0 quando $x \geq -\sqrt[3]{2}$. Quindi

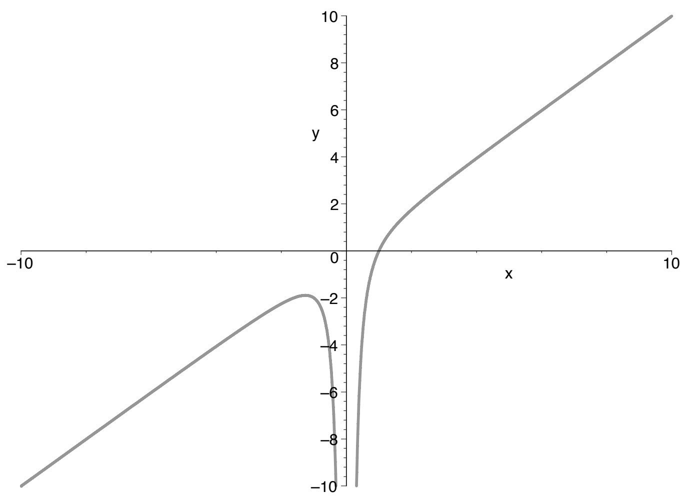
$$f'(x)\begin{cases} >0, & \text{se } x \in]-\infty,-\sqrt[3]{2}[\cup]0,+\infty[, \\ =0, & \text{se } x = -\sqrt[3]{2}, \\ <0, & \text{se } x \in]-\sqrt[3]{2},0[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente su $]-\infty,-\sqrt[3]{2}[$ e su $]0,+\infty[$, decrescente su $]-\sqrt[3]{2},0[$. In $x = -\sqrt[3]{2}$ ha un punto di massimo relativo. Dallo studio dei limiti si vede che la funzione non ammette massimo o minimo globale.

e) La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{3x^2x^3-(x^3+2)3x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}.$$

La derivata seconda è banalmente negativa sul dominio perciò la funzione è convessa su $]-\infty,0[$ e su $]0,+\infty[$.



$\boxed{3}$ Applicando due volte il metodo per parti si ottiene

$$\int e^{-2x}\cos(3x)\,dx = \frac{e^{-2x}}{-2}\cos(3x) - \int\frac{e^{-2x}}{-2}(-3\,\mathrm{sen}(3x))\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2}\cos(3x) - \frac{3}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{sen}(3x)\,dx$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{2}\cos(3x) - \frac{3}{2}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{sen}(3x) - \int\frac{e^{-2x}}{-2}3\cos(3x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{2}\cos(3x) + \frac{3}{4}e^{-2x}\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos(3x)\,dx.$$

Portando l'integrale di destra a primo membro si ottiene

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int \mathrm{e}^{-2x}\cos(3x)\,dx = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\cos(3x) + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{sen}(3x) + c$$

perciò

$$\int \mathrm{e}^{-2x}\cos(3x)\,dx = \frac{4}{13}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\cos(3x) + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{sen}(3x)\right) + c$$

con c costante arbitraria.

4a Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{5n^3}{n^6} = \frac{5}{n^3}$ che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è convergente.

4b Proviamo ad applicare il criterio della convergenza assoluta:

$$|(-1)^n a_n| = \frac{n}{2n^2+n+1} \sim \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

termine generale di una serie divergente. Dunque, per asintoticità, la serie data diverge assolutamente. Ciò non ci dice nulla, però, della convergenza semplice.

La serie è a segni alterni, dunque proviamo ad applicare il criterio di Leibniz. Innanzitutto il termine generale è banalmente infinitesimo.

Rimane quindi da verificare che si ha $a_n \geq a_{n+1}$ almeno per tutti gli n sufficientemente grandi. A tal fine si può introdurre la funzione $f(x) = \frac{x}{2x^2+x+1}$ tale che $a_n = f(n)$. Per provare la monotonia di a_n è allora sufficiente provare che f è decrescente per tutti gli x sufficientemente grandi. Basta quindi provare che $f'(x) \leq 0$ per tutti gli x grandi. Si ha

$$f'(x) = \frac{(2x^2+x+1) - x(4x+1)}{(2x^2+2x+1)^2} = \frac{1-2x^2}{(2x^2+2x+1)^2}$$

Si ha che $f'(x) \leq 0$ se e solo se $1-2x^2 \leq 0$ ovvero $1/\sqrt{2} \leq |x|$. Quindi f è decrescente per tutti gli $x \geq 1/\sqrt{2}$, di conseguenza $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.

Alternativamente si poteva risolvere direttamente:

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{n}{2n^2+n+1} \geq \frac{n+1}{2(n+1)^2+(n+1)+1} \iff$$

$$n(2n^2+5n+4) \geq (n+1)(2n^2+n+1) \iff 2n^2+2n-1 \geq 0,$$

che è vero almeno per tutti gli $n \geq 1$.

In conclusione, per il criterio di Leibniz la serie converge.

5 Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$. I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6x^2y + 2x = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 + 2y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(2x^2+3xy+1) = 0, \\ y = -x^3. \end{cases}$$

Se $x = 0$ la prima equazione è soddisfatta mentre sostituendo nella seconda si ha $y = 0$. Si ottiene il punto critico $P_1 = (0,0)$. Se $x \neq 0$, si può dividere la prima equazione per x e sostituendo la seconda nella prima si ottiene l'equazione biquadratica

$$3x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

Posto $z = x^2 \geq 0$ si ha $3z^2 - 2z - 1 = 0$ che ha come soluzioni $z_1 = -1/3$ e $z_2 = 1$. La prima radice non è accettabile, la seconda porta a $x^2 = 1$ ovvero $x = 1$ (e corrispondentemente $y = -1$) oppure

$x = -1$ (e corrispondentemente $y = 1$). Si ottengono così gli altri due punti critici $P_2 = (1, -1)$ e $P_3 = (-1, 1)$.

Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 12xy + 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2.$$

L'Hessiano nel punto P_1 è

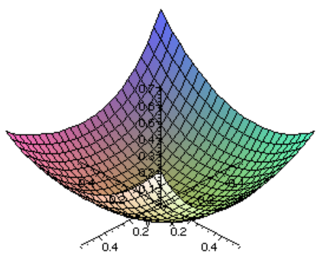
$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

e poiché gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, P_1 è punto di minimo relativo.

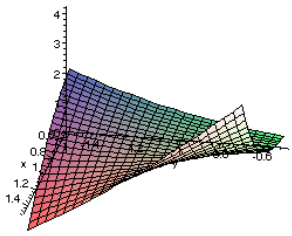
L'Hessiano nei punti P_2 e P_3 è

$$H(\pm 1, \mp 1) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -32 < 0,$$

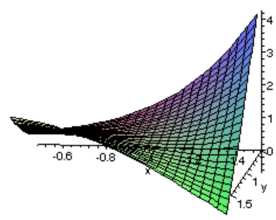
dunque sono punti di sella.



Il punto critico P_1



Il punto critico P_2



Il punto critico P_3

6a Si ha

$$g_1'(x) = \mathrm{e}^{x-x^2}(1-2x), \qquad g_1''(x) = \mathrm{e}^{x-x^2}(1-2x)^2 - 2\mathrm{e}^{x-x^2}, \qquad g_1'''(x) = \mathrm{e}^{x-x^2}(1-2x)^3 - 6\mathrm{e}^{x-x^2}(1-2x).$$

Quindi $g_1(0) = 1$, $g_1'(0) = 1$, $g_1''(0) = -1$, $g_1'''(0) = -5$ e il polinomio di Taylor è

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{-5}{3!}x^3 = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3.$$

Alternativamente, si può sfruttare lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale:

$$\mathrm{e}^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3),$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x-x^2} &= 1 + (x - x^2) + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{6} + o\big((x-x^2)^3\big) \\ &= 1 + x - x^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3) + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Dall'unicità dello sviluppo segue nuovamente che $P_3(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3$.

$\boxed{\textbf{6b}}$ Utilizzando gli sviluppi

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3), \qquad \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \qquad \operatorname{arctg} y = y + o(y^2), \qquad \mathrm{e}^y = 1 + y + o(y),$$

si trova

$$x - 2\ln(1+x^2) = x - 2\left(x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + o\big((x^2)^2\big)\right) = x - 2x^2 + o(x^3),$$

$$\operatorname{sen}(x - 2\ln(1+x^2)) = (x - 2x^2 + o(x^3)) - \frac{(x - 2x^2 + o(x^3))^3}{6} + o\big((x - 2x^2 + o(x^3))^3\big) = x - 2x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$x^2\mathrm{e}^x = x^2(1 + x + o(x)) = x^2 + x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{arctg}(x^2\mathrm{e}^x) = (x^2 + x^3 + o(x^3)) + o\big((x^2 + x^3 + o(x^3))^2\big) = x^2 + x^3 + o(x^3),$$

perciò

$$\begin{aligned} g_2(x) &= x^2\left(x^2 + x^3 + o(x^3) - \big(x - 2x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\big)\right) = x^2\left(-x + 3x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= -x^3 + 3x^4 + \frac{7}{6}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Quindi il polinomio di Taylor richiesto è $P_5(x) = -x^3 + 3x^4 + \frac{7}{6}x^5$.