Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Analisi Matematica

Appello del 7 luglio 2005

Cognome e Nome | Matricola

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Consegnare anche il presente testo.

1 Risolvere i seguenti limiti

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}-4\cos(\pi x)}{x(3-x)}, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}(x-2x^2)-\ln(\mathrm{e}^x-x)}{\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^{2x}-1)-2\,\mathrm{sen}\,x+4x^3}.$$

2 Data la funzione $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x}-1$

a) trovare il dominio di definizione e i limiti agli estremi del dominio; **b)** calcolare la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o globale della funzione; **c)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **d)** tracciare l'andamento qualitativo del grafico di f, **e)** studiare qualitativamente il segno della funzione.

3 Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

$$\textbf{a)}\ \int\frac{2x^{4/3}-\ln x}{x}\,dx \qquad \textbf{b)}\ \int(x^2-4x)\mathrm{e}^{2x}\,dx$$

4 Si studi la convergenza delle serie

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n^{7/2}+1}{n^4+2n^{2/5}+4}, \qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(2+\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{arcsen}(\mathrm{e}^{-1/n})}\right)^{2n}$$

5 Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione $h(x,y)=\ln(1+xy)$. Trovare i punti critici di h e dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Punteggi: 3+4, 2+3+3+2+3, 3+4, 3+3, 4

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 7 luglio 2005

$\boxed{\textbf{1a}}$ Il limite si presenta nella forma $[\frac{4}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $x = 3$. Il numeratore tende a 4 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere positivo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo se $x(3-x) > 0$ ovvero se $0 < x < 3$. Allora la funzione è negativa in un intorno destro di 3 e positiva in un intorno sinistro di 3. Si conclude che

$$\lim_{x\to 3^\pm} \frac{3-\sqrt{x+6}-4\cos(\pi x)}{x(3-x)} = \left[\frac{4}{0^\mp}\right] = \mp\infty,$$

dunque il limite non esiste.

$\boxed{\textbf{1b}}$ Si può applicare due volte de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x-2x^2)-\ln(\mathrm{e}^x-x)}{\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^{2x}-1)-2\,\mathrm{sen}\,x+4x^3}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x-2x^2)+x(1-4x)\cos(x-2x^2)-\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-x}}{\frac{1}{1+(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}2\mathrm{e}^{2x}-2\cos x+12x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-4x)\cos(x-2x^2)+(1-8x)\cos(x-2x^2)-x(1-4x)^2\,\mathrm{sen}(x-2x^2)-\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-x)-(\mathrm{e}^x-1)^2}{(\mathrm{e}^x-x)^2}}{\frac{4\mathrm{e}^{2x}\left(1+(\mathrm{e}^{2x}-1)^2\right)-2\mathrm{e}^{2x}2(\mathrm{e}^{2x}-1)2\mathrm{e}^{2x}}{\left(1+(\mathrm{e}^{2x}-1)^2\right)^2}+2\,\mathrm{sen}\,x+24x}$$

$$= \left[\frac{1+1-0-1}{4+0+0}\right] = \frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 2 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad \ln(1+x) = x+o(x), \qquad \mathrm{sen}\,x = x+o(x^2), \qquad \mathrm{arctg}\,x = x+o(x^2),$$

si ottiene

$$x\,\mathrm{sen}(x-2x^2) = x\big(x-2x^2+o\big((x-2x^2)^2\big)\big) = x^2+o(x^2),$$

$$\mathrm{e}^x - x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad \mathrm{e}^{2x}-1 = 2x+\frac{(2x)^2}{2}+o((2x)^2) = 2x+2x^2+o(x^2),$$

$$\ln(\mathrm{e}^x-x) = \ln\left(1+(\frac{x^2}{2}+o(x^2))\right) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)+o\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^{2x}-1) = \big(2x+2x^2+o(x^2)\big)+o\big((2x+2x^2+o(x^2))^2\big) = 2x+2x^2+o(x^2).$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ è

$$\mathrm{Num}(x) = x^2+o(x^2)-\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

e quello del denominatore $\mathrm{Den}(x)$, tenuto conto che $x^3 = o(x^2)$, è

$$\mathrm{Den}(x) = 2x+2x^2+o(x^2)-2\big(x+o(x^2)\big)+o(x^2) = 2x^2+o(x^2).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x-2x^2)-\ln(\mathrm{e}^x-x)}{\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^{2x}-1)-2\,\mathrm{sen}\,x+4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{2+\frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{1}{4}.$$

Il limite richiesto vale allora $1/4$.

$\boxed{2}$ **a)** Il dominio è dato da tutti gli $x > 0$ (esistenza del logaritmo) e $x \neq 0$, perciò $\mathcal{D} =]0, +\infty[$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4\ln x}{x} - 1\right) = \left[\frac{-\infty}{0^+} - 1\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4\ln x}{x} - 1\right) = 4\left(\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}\right) - 1 \overset{H}{=} 4\left(\lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1}\right) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Quindi la retta $x = 0$ è un asintoto verticale e la retta $y = -1$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$.

b) La derivata prima è

$$f'(x) = 4\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 4\frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $1 - \ln x \geq 0$, ovvero $x \leq e$. Quindi

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]0, e[, \\ = 0, & \text{se } x = e, \\ < 0, & \text{se } x \in]e, +\infty[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente su $]0, e[$, decrescente su $]e, +\infty[$ e in $x = e$ ha un punto di massimo relativo e assoluto. Dallo studio dei limiti si vede che la funzione non ammette minimo globale.

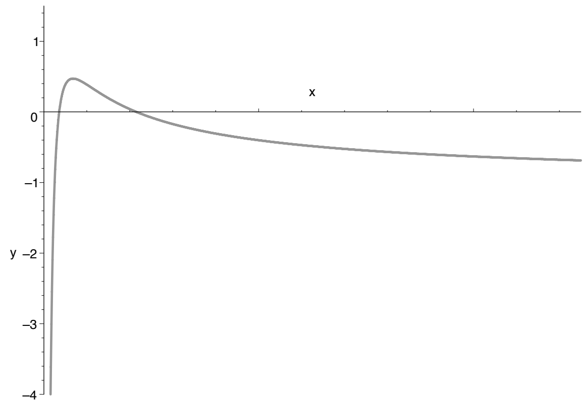
c) La derivata seconda è

$$f''(x) = 4\frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = 4\frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Sul dominio il denominatore è sempre positivo, perciò $f''(x) \geq 0$ se e solo se $2\ln x - 3 \geq 0$ ovvero $\ln x \geq 3/2$ quindi $x \geq \mathrm{e}^{3/2}$. In conclusione

$$f''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]\mathrm{e}^{3/2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = \mathrm{e}^{3/2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, \mathrm{e}^{3/2}[. \end{cases}$$

La funzione è convessa su $]\mathrm{e}^{3/2}, +\infty[$, mentre è concava su $]0, \mathrm{e}^{3/2}[$. In $x = \mathrm{e}^{3/2}$ presenta un punto di flesso.



e) Non è possibile studiare esplicitamente il segno della funzione. Ricorriamo dunque allo studio dei limiti e della derivata prima. Valutiamo ora i valori che la funzione assume nel punto di massimo e agli estremi del dominio:

$$f(e) = \frac{4\ln e}{e} - 1 = \frac{4}{e} - 1 > 0.$$

Sull'intervallo $]0, e]$ la funzione è continua e valgono $f(e) > 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Per (un'estensione de) il Teorema degli zeri, f ammette almeno uno zero nell'intervallo e poiché la funzione è ivi strettamente crescente, tale zero x_1 è unico. Analogamente sull'intervallo $[e, +\infty[$ la funzione è strettamente crescente e si ha $f(e) > 0$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1 < 0$, perciò ivi la funzione ammette esattamente un unico zero x_2. In conclusione

$$f(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]x_1, x_2[, \\ = 0, & \text{se } x = x_1 \text{ oppure } x = x_2, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, x_1[\cup]x_2, +\infty[. \end{cases}$$

In particolare f ammette esattamente due zeri.

3a Si ha

$$\int \frac{2x^{4/3}-\ln x}{x}\,dx = 2\int x^{1/3}\,dx - \int \frac{\ln x}{x}\,dx = 2\frac{x^{4/3}}{4/3} - \int \ln x\,(\ln x)'\,dx = \frac{3}{2}x^{4/3} - \frac{\ln^2 x}{2} + c.$$

3b Applicando il metodo per parti si ottiene

$$\int (x^2-4x)\mathrm{e}^{2x} = (x^2-4x)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int (2x-4)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,dx = (x^2-4x)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \left((2x-4)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} - \int 2\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\,dx\right)$$

$$= (x^2-4x)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - (x-2)\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + c = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}(2x^2-10x+5) + c$$

4a Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{2n^{7/2}}{n^4} = \frac{2}{n^{1/2}}$ che è il termine generale di una serie divergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è divergente.

4b Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\ln(2+\mathrm{e}^{-n})}{\operatorname{arcsen}(\mathrm{e}^{-1/n})}\right)^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(2+\mathrm{e}^{-n})}{\operatorname{arcsen}(\mathrm{e}^{-1/n})}\right)^2 = \left(\frac{\ln 2}{\operatorname{arcsen} 1}\right)^2 = \left(\frac{\ln 2}{\pi/2}\right)^2 < 1.$$

Dunque la serie converge.

5 Il dominio è $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1+xy>0\}$. I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{1+xy} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{1+xy} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

Si ottiene l'unico punto critico $P=(0,0)\in\mathcal{D}$.

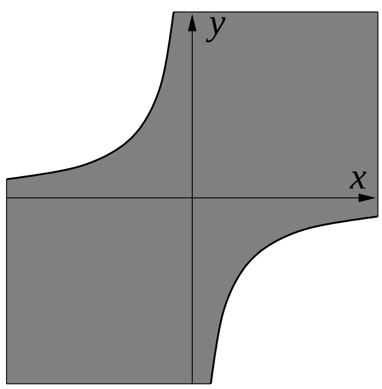
Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y^2}{(1+xy)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{(1+xy)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{(1+xy)-yx}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2},$$

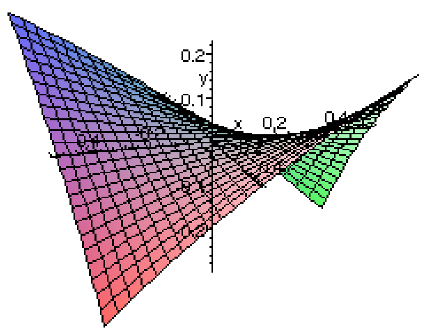
perciò l'Hessiano nel punto P è

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

dunque P è punto di sella.



Dominio di f



Il punto critico $P=(0,0)$