Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

24 novembre 2004

$\boxed{1}$ Dato l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2t+3}{y^4} \qquad t \geq 0$$

a) dire se la funzione $y(t) = 3t + 2$ è soluzione dell'equazione;

b) determinare la generica soluzione del problema, ad esempio col metodo di separazione delle variabili;

c) tra tutte le soluzioni determinare quella per cui $y(1) = 2$.

$\boxed{2}$ Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3t^2 y + t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) dire se la funzione $y(t) = -1/3$ è soluzione del problema;

b) determinare una soluzione del problema, qualora non lo sia la funzione di cui al punto a).

$\boxed{3}$ Data la funzione

$$g(x) = x\sqrt{1-x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = -3$;

e) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

Soluzioni degli esercizi del 24 novembre 2004

$\boxed{1}$ a) Si ha $y'(t) = 3$ e sostituendo si ottiene l'equazione

$$3 = \frac{2t+3}{(3t+2)^4}$$

che non è identicamente soddisfatta per $t \geq 0$ (ad esempio, per $t = 0$ si ottiene $3 \neq 3/16$). La funzione non è dunque soluzione.

b) Scrivendo $y' = \frac{dy}{dt}$, utilizzando il metodo di separazione delle variabili si ha

$$y^4\, dy = (2t+3)\, dt$$

e integrando

$$\int y^4\, dy = \int (2t+3)\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y^5}{5} = t^2 + 3t + c$$

dove c è la generica costante d'integrazione. Passando alle radici si ottiene infine

$$y(t) = \sqrt[5]{5t^2 + 15t + c}$$

c) Imponendo la condizione $y(1) = 2$ si ricava $2 = \sqrt[5]{20 + c}$ che risolta nell'incognita c fornisce $c = 12$. La soluzione è quindi $y(t) = \sqrt[5]{5t^2 + 15t + 12}$.

$\boxed{2}$ a) Si ha $y'(t) = 0$ e sostituendo si ottiene

$$0 = 3t^2 \left(-\frac{1}{3}\right) + t^2$$

che è identicamente soddisfatta per $t \in \mathbb{R}$. La funzione è dunque soluzione della prima equazione. Tuttavia $y(0) \neq 1$ perciò non verifica le condizioni iniziali, quindi non è soluzione del problema di Cauchy.

b) Si ricorda che la generica soluzione dell'equazione lineare

$$y' = a(t)y + b(t)$$

con $a(t), b(t)$ funzioni continue, è

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$.

Nel nostro caso $a(t) = 3t^2$ e una sua primitiva è ad esempio $A(t) = t^3$. La generica soluzione è dunque

$$y(t) = e^{t^3} \int e^{-t^3} t^2\, dt = -\frac{e^{t^3}}{3} \int e^{-t^3} (-3t^2)\, dt$$

Dalla Tabella 2 degli integrali si vede che

$$\int e^{f(t)} f'(t)\, dt = e^{f(t)} + c$$

con c generica costante d'integrazione, perciò

$$y(t) = -\frac{e^{t^3}}{3}\left(e^{-t^3} + c\right) = -\frac{1}{3} + \bar{c}\, e^{t^3}$$

essendo $\bar{c} = -c/3$ un generico numero reale al pari di c.

c) Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene l'equazione $1 = -1/3 + \bar{c}$ quindi $\bar{c} = 4/3$ e la soluzione è $y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}e^{t^3}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Il dominio è dato da $1 - x \geq 0$ perciò $\mathcal{D} =]-\infty, 1]$. La funzione è ivi continua e derivabile.

b) L'unico limite da calcolare è

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = [(-\infty)\cdot(+\infty)] = -\infty.$$

Quindi la funzione non ammette minimo assoluto.

c) Per ogni $x < 1$ la derivata prima è

$$g'(x) = \sqrt{1-x} + x\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

quindi $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2 - 3x \geq 0$, ovvero $x \leq 2/3$.

In definitiva la derivata è positiva per $x < 2/3$, negativa se $x \in]2/3, 1[$. La funzione è quindi crescente su $]-\infty, 2/3[$ e decrescente su $]2/3, 1[$. In $x = 2/3$ ammette un punto di massimo relativo a tangente orizzontale, che è anche di massimo assoluto.

d) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(-3) = -6$ e $g'(-3) = 11/4$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{11}{4}(x+3) - 6.$$