Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

17 novembre 2004

1 Data la funzione

$$g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 12x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$;

b) studiare il segno di g;

c) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

d) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o assoluto;

e) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = -1$,

f) determinare gli intervalli dove la funzione è concava e quelli dove la funzione è convessa;

g) tracciare l'andamento qualitativo del grafico di g.

2 Per l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y(y+1)}{t}$$

verificare se le seguenti funzioni sono soluzioni:

a) $y_1(t) = t^2 - 2t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$ **b)** $y_2(t) = \dfrac{2t}{1-2t}, \qquad \forall\, t \in]1/2, +\infty[$

3 Data la funzione

$$h(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{2x}$$

a) determinare il dominio $\mathcal{D}$;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente.

Soluzioni degli esercizi del 17 novembre 2004

$\boxed{1}$ a) Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui $3x^2 - 12x \neq 0$, ovvero $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. La funzione è ivi continua e derivabile.

b) Il numeratore è ≥ 0 quando $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ ovvero $x \leq 1$ oppure $x \geq 3$, mentre il denominatore è positivo se e solo se $x < 0$ oppure $x > 4$. Si conclude che

$$g(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]1, 3[\cup]4, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1 \text{ oppure } x = 3, \\ < 0, & \text{se } x \in]0, 1[\cup]3, 4[. \end{cases}$$

c) Dal punto b) si ottiene che

$$\lim_{x \to 0^\pm} g(x) = \left[\frac{3}{0^\mp}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to 4^\pm} g(x) = \left[\frac{3}{0^\pm}\right] = \pm\infty,$$

mentre (limite all'infinito di funzioni razionali)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}.$$

Quindi la funzione non ammette minimo nè massimo assoluto.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x-4)(x^2-4x) - (x^2-4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x)^2} = -\frac{2x-4}{(x^2-4x)^2},$$

quindi $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x - 4 \leq 0$ ovvero se $x \leq 2$. La funzione è dunque crescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, 2[$, decrescente su $]2, 4[$ e su $]4, +\infty[$. In $x = 2$ ammette un massimo relativo.

e) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x - x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

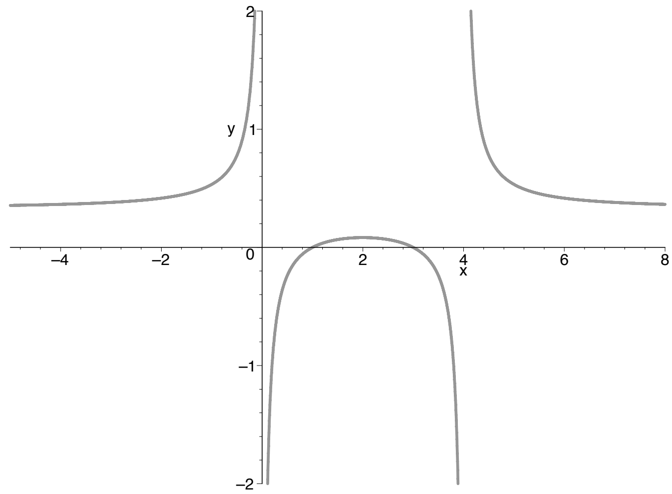
Poiché $g(-1) = 8/15$ e $g'(-1) = 6/25$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{6}{25}(x+1) + \frac{8}{15}.$$

f) La derivata seconda è

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{2(x^2-4x)^2 - (2x-4)2(x^2-4x)(2x-4)}{(x^2-4x)^4} = -\frac{2(x^2-4x) - 2(2x-4)^2}{(x^2-4x)^3} \\ &= 2\frac{3x^2-12x+16}{(x^2-4x)^3}. \end{aligned}$$

Poiché il numeratore è sempre positivo, si ha che $g''(x) > 0$ se e solo se $(x^2 - 4x)^3 > 0$ ovvero se $x < 0$ oppure $x > 4$. La funzione è dunque concava su $]0, 4[$, convessa su $]-\infty, 0[$ e su $]4, +\infty[$.



$\boxed{2}$ a) La funzione $y_1(t)$ è definita e derivabile su $\mathbb{R}^+$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_1'(t) = \frac{y_1(t)(y_1(t)+1)}{t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Si ha

$$y_1'(t) = 2t - 2,$$

$$\frac{y_1(t)(y_1(t)+1)}{t} = \frac{(t^2-2t)(t^2-2t+1)}{t} = (t-2)(t-1)^2.$$

Si osserva, ad esempio, che

$$2 = y_1'(2) \neq \frac{y_1(2)(y_1(2)+1)}{2} = 0$$

quindi y_1 non è soluzione dell'equazione.

b) La funzione $y_2(t)$ è definita e derivabile su $]1/2, +\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y_2'(t) = \frac{y_2(t)(y_2(t)+1)}{t}$ per ogni $t \in]1/2, +\infty[$. Si ha

$$y_2'(t) = \frac{2(1-2t) - 2t(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{2}{(1-2t)^2},$$

$$\frac{y_2(t)(y_2(t)+1)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{1-2t}\left(\frac{2t}{1-2t} + 1\right) = \frac{2}{1-2t}\left(\frac{1}{1-2t}\right) = \frac{2}{(1-2t)^2}.$$

In conclusione si ha che $y_2'(t) = \frac{y_2(t)(y_2(t)+1)}{t}$ per ogni $t \in]1/2, +\infty[$, dunque y_2 è soluzione.

$\boxed{3}$ a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \big[(+\infty)\cdot(+\infty)\big] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{e^{-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{-2e^{-2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{4e^{-2x}} = 0.$$

c) La derivata prima è

$$h'(x) = (2x-3)e^{2x} + (x^2-3x+2)e^{2x}2 = (2x^2-4x+1)e^{2x}.$$

Quindi $h'(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2 - 4x + 1 \geq 0$ ovvero $x \leq \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ oppure $\frac{2+\sqrt{2}}{2} \leq x$. La funzione è quindi decrescente su $]\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}[$, crescente su $]-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{2}[$ e su $]\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. In $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ e $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ammette rispettivamente un massimo ed un minimo relativo. Il punto $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ è anche di minimo globale mentre h non ammette massimo globale.