Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

10 novembre 2004

$\boxed{\mathbf{1}}$ Data la funzione

$$g(x) = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$$

a) determinarne il dominio $\mathcal{D}$;

b) calcolare i limiti agli estremi del dominio;

c) determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e quelli dove la funzione è decrescente;

d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 3$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,\mathrm{sen}\,x} - 3e^x + 2}{x\,\mathrm{sen}(2x) + 3x^2}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Data la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4ax + 1 & \text{se } x < 0 \\ 3^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro reale a, la funzione f è continua in ogni punto;

b) determinare per quali valori del parametro reale a, la funzione f è derivabile in ogni punto.

Soluzioni degli esercizi del 10 novembre 2004

$\boxed{1}$ a) Il dominio è dato dagli x per cui il denominatore non si annulla, quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ e la funzione è ivi continua e derivabile.

b) Ha senso andare a studiare i limiti in 1, 2 e $\pm\infty$. Si ha (limiti di funzioni razionali)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = 0.$$

Poiché il denominatore è positivo per valori esterni a 1 e 2, si ottiene che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

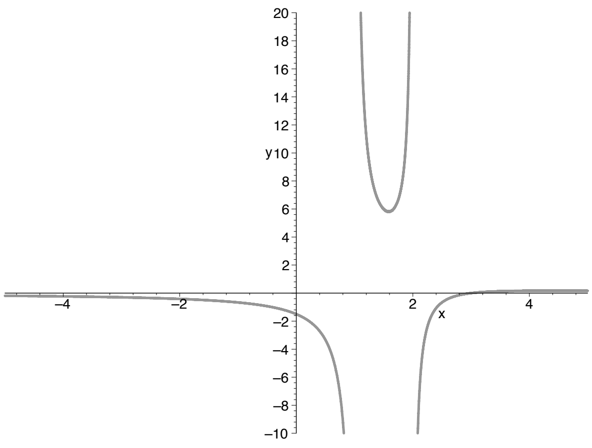
c) Calcoliamo la derivata prima:

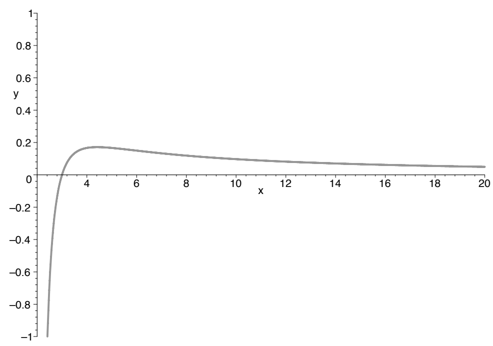
$$g'(x) = \frac{1\cdot(x^2-3x+2)-(x-3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-x^2+6x-7}{(x^2-3x+2)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo quindi la derivata è ≥ 0 se e solo se $-x^2+6x-7 \geq 0$ ovvero $3-\sqrt{2} \leq x \leq 3+\sqrt{2}$. Ricordando che la funzione non è definita in 1 e in 2 si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]3-\sqrt{2}, 2[\cup]2, 3+\sqrt{2}[, \\ = 0, & \text{se } x = 3-\sqrt{2} \text{ oppure } x = 3+\sqrt{2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, 1[\cup]1, 3-\sqrt{2}[\cup]3+\sqrt{2}, +\infty[. \end{cases}$$

Quindi la funzione è crescente su $]3-\sqrt{2}, 2[$ e su $]2, 3+\sqrt{2}[$, mentre è decrescente su $]-\infty, 1[$, su $]1, 3-\sqrt{2}[$ e su $]3+\sqrt{2}, +\infty[$. In $x = 3-\sqrt{2}$ e $x = 3+\sqrt{2}$ la funzione ammette, rispettivamente, un minimo e un massimo relativo.





d) L'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, g(x_0))$ è

$$y = (x-x_0)g'(x_0) + g(x_0).$$

Poiché $g(3) = 0$ e $g'(3) = 1/2$, l'equazione della retta cercata è

$$y = \frac{x-3}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Il limite si presenta nella forma d'indecisione [0/0]. Applicando de l'Hôpital due volte consecutivamente si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,\mathrm{sen}\,x} - 3e^x + 2}{x\,\mathrm{sen}(2x) + 3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,\mathrm{sen}\,x} 3\cos x - 3e^x}{\mathrm{sen}(2x) + 2x\cos(2x) + 6x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,\mathrm{sen}\,x} 9\cos^2 x - e^{3\,\mathrm{sen}\,x} 3\,\mathrm{sen}\,x - 3e^x}{2\cos(2x) + 2\cos(2x) - 4x\,\mathrm{sen}(2x) + 6} = \frac{9-0-3}{2+2-0+6} = \frac{3}{5}.$$

Per de l'Hôpital il limite cercato vale allora 3/5.

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) La funzione è continua in tutti gli $x \neq 0$ per ogni scelta di a. Studiamo la continuità in $x = 0$: imponendo la condizione che i limiti sinistro e destro coincidano col valore della funzione otteniamo

$$1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

quindi la funzione è continua anche in 0 per ogni scelta di a.

b) La funzione è chiaramente derivabile per ogni $x \neq 0$, per ogni scelta di a, e vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 4a & \text{se } x < 0 \\ 3^x \ln 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Affinché sia derivabile anche in $x = 0$, imponiamo la condizione che la derivata sinistra e la derivata destra in $x = 0$ coincidano:

$$-4a = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \ln 3$$

da cui si ricava $-4a = \ln 3$. La funzione è derivabile anche in $x = 0$ solamente nel caso in cui $a = -\frac{\ln 3}{4}$.