Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

3 novembre 2004

1 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$1 + \log_2(x+2) \leq \log_2(1 + \sqrt{9 - x^2})$$

2 Data la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3a + 2 & \text{se } x > 0 \\ 1 - 3x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro reale a, la funzione f è invertibile;

b) dire se per $a = -1$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare il dominio, l'immagine e la legge della funzione inversa;

c) dire per quali valori di a, se ne esistono, la funzione f è continua in ogni punto.

3 Calcolare, qualora possibile, il valore dei seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 3x - 5}{x - 3x^2 + 1}$ **b)** $\displaystyle\lim_{t\to1} \frac{t^2 + 3t + 1}{(1-t)\ln t}$

Soluzioni degli esercizi del 3 novembre 2004

$\boxed{1}$ L'argomento del secondo logaritmo è sempre positivo. Dobbiamo quindi imporre le condizioni d'esistenza del primo logaritmo e della radice quadrata:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 9-x^2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2<x \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \iff -2 < x \le 3$$

Osservando che $1 = \log_2 2$ e utilizzando le formule dei logaritmi, si ottiene la disequazione equivalente

$$\log_2 \left[2(x+2)\right] \le \log_2(1+\sqrt{9-x^2})$$

Poiché la funzione logaritmica in base 2 è crescente, la disequazione equivale a

$$2x+4 \le 1+\sqrt{9-x^2} \qquad \iff \qquad 2x+3 \le \sqrt{9-x^2}$$

Distinguiamo due casi: se $2x+3<0$ ovvero se $x<-3/2$, la disequazione ha sempre soluzione, poiché il membro sinistro è negativo, quello destro positivo.

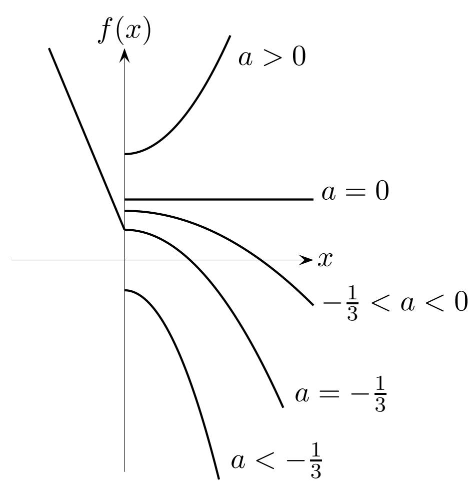
Nel secondo caso, se $2x+3 \ge 0$ ovvero se $x \ge -3/2$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo

$$(2x+3)^2 \le 9-x^2 \qquad \iff \qquad 5x^2+12x \le 0 \qquad \iff \qquad -12/5 \le x \le 0.$$

Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S =]-2, 0]$$

$\boxed{2}$ a) Rappresentiamo il grafico della funzioni per vari intervalli del parametro reale a



La funzione è invertibile se $a \le -1/3$.

b) La funzione è invertibile. In questo caso l'immagine di f è $f(\mathbb{R}) =]-\infty, -1[\cup[1, +\infty[$ che quindi è il dominio della funzione inversa. La sua immagine coincide invece col dominio di f cioè $\mathbb{R}$.

Se $y \in [1, +\infty[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 1 - 3x$ ottenendo quindi $x = \frac{1-y}{3}$.

Se, invece, $y \in]-\infty, -1[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = -x^2 - 1$, ovvero $x^2 = -y - 1$. Ricordando che in questo caso $y < -1$ e che i corrispondenti x sono positivi, si ottiene infine $x = \sqrt{-y-1}$. Ricapitolando

$$f^{-1} :]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1-y}{3} & \text{se } y > 1 \\ \sqrt{-y-1} & \text{se } y < -1 \end{cases}$$

c) Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione elementare, f è una funzione continua in ogni punto $x \neq 0$, per qualsiasi scelta di a. Perché sia continua anche in $x = 0$ deve accadere che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

Graficamente si intuisce che ciò accade quando $a = -1/3$. In effetti per definizione vale

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 1$$

Dovrà dunque essere

$$1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (ax^2 + 3a + 2) = 3a + 2$$

ed effettivamente ciò implica $a = -1/3$

3 a) Il primo è un limite di una funzione razionale:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x - 5}{x - 3x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{2 - 3/x^2 - 5/x^3}{1/x - 3 + 1/x^2} \right) = \left[-\infty \cdot \frac{2 - 0 - 0}{0 - 3 - 0} \right] = +\infty$$

b) Il secondo limite si presenta nella forma d'indecisione $[\frac{5}{0}]$. Studiamo quindi il segno della funzione in un intorno di $t_0 = 1$. Il numeratore tende a 5 e quindi è positivo per i valori di t vicini a 1. Poiché $\ln t$ è positivo per $t > 1$ si ottiene che il denominatore è sempre negativo per $t \neq 1$. Quindi

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^2 + 3t + 1}{(1 - t) \ln t} = \left[\frac{5}{0^-} \right] = -\infty$$