Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2004/2005

Facoltà di Agraria

Esercitazioni di Matematica

27 ottobre 2004

1 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\log_2 |1 - 2x| \leq 2 \log_4(3x + 1)$$

2 Trovare le soluzioni della seguente disequazione:

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 9 \cdot 3^x$$

3 Data la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + a & \text{se } x > 0 \\ 2^x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro reale a, la funzione f è invertibile;

b) dire se per $a = 2$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare il dominio, l'immagine e la legge della funzione inversa;

c) dire per quali valori di a, se ne esistono, la funzione f è continua in ogni punto.

Soluzioni degli esercizi del 27 ottobre 2004

$\boxed{1}$ Innanzitutto la disequazione ha senso quando gli argomenti del logaritmi sono positivi, cioè

$$\begin{cases} |1-2x| > 0 \\ (3x+1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1/2 \\ x > -1/3 \end{cases}$$

Utilizzando la formula del cambiamento di base dei logaritmi si ottiene

$$\log_4(3x+1) = \frac{\log_2(3x+1)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(3x+1)}{2}$$

perciò la disequazione equivale a

$$\log_2|1-2x| \leq \log_2(3x+1)$$

Poiché la funzione logaritmica in base 2 è crescente, quest'ultima equivale a

$$|1-2x| \leq (3x+1)$$

Distinguiamo due casi: se $1-2x > 0$ ovvero se $x < 1/2$, la disequazione equivale a $1-2x \leq 3x+1$ che ha come soluzioni gli $x \geq 0$, e in definitiva, gli $0 \leq x < 1/2$.

Nel secondo caso, se $1-2x < 0$ ovvero se $x > 1/2$, la disequazione equivale a $-(1-2x) \leq 3x+1$ che ha come soluzioni gli $x \geq -2$, e in definitiva, gli $x > 1/2$.

Ricordandoci delle condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni è

$$S = [0, 1/2[\cup]1/2, +\infty[$$

$\boxed{2}$ La disequazione ha senso quando l'argomento della radice quadrata è non negativo, cioè se $x^2-1 \geq 0$ ovvero $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$. Poiché inoltre $9 = 3^2$ la disequazione può essere scritta nella forma

$$3^{\sqrt{x^2-1}} \geq 3^{2+x}$$

e utilizzando la proprietà di crescenza della funzione esponenziale di base 3 si ottiene equivalentemente

$$\sqrt{x^2-1} \geq 2+x$$

Si distinguono 2 casi: se $2+x < 0$ ovvero $x < -2$, la disequazione ha sempre soluzione, poiché il membro sinistro è positivo, quello destro negativo.

Nel secondo caso, se $2+x \geq 0$ ovvero $x \geq -2$, entrambi i membri sono positivi e si può elevare al quadrato, ottenendo

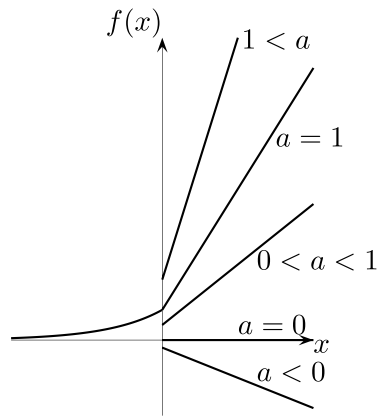
$$x^2 - 1 \geq 4 + 4x + x^2 \quad \iff \quad -5 \geq 4x \quad \iff \quad -5/4 \geq x$$

ottenendo quindi le soluzioni $-2 \leq x \leq -5/4$.

Ricordandoci delle condizioni d'esistenza si ottiene che l'insieme delle soluzione è dato da

$$S =]-\infty, -5/4]$$

$\boxed{3}$ a) Rappresentiamo il grafico della funzioni per vari intervalli del parametro reale a



La funzione è invertibile se $a < 0$ oppure $1 \leq a$.

b) La funzione è invertibile. In questo caso l'immagine di f è $f(\mathbb{R}) =]0,1] \cup]2,+\infty[$ che quindi è il dominio della funzione inversa. La sua immagine coincide invece col dominio di f cioè $\mathbb{R}$.

Se $y \in]0,1]$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 2^x$ ottenendo quindi $x = \log_2 y$.

Se, invece, $y \in]2,+\infty[$, la forma della legge della funzione inversa si ottiene risolvendo in x l'equazione $y = 4x + 2$, ottenendo $x = \frac{y-2}{4}$. Ricapitolando

$$f^{-1} :]0,1] \cup]2,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-2}{4} & \text{se } y > 2 \\ \log_2 y & \text{se } 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

c) Si osserva che, coincidendo localmente con una funzione elementare, f è una funzione continua in ogni punto $x \neq 0$, per qualsiasi scelta di a. Perché sia continua anche in $x = 0$ deve accadere che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

Graficamente si intuisce che ciò accade quando $a = 1$. In effetti per definizione vale

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 2^0 = 1$$

Dovrà dunque essere

$$1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2ax + a) = a$$

ed effettivamente ciò implica $a = 1$