Soluzioni dei Problemi della Prova Scritta del 5 aprile 2004

Test di teoria

[1] D; **[2]** B; **[3]** C; **[4]** C; **[5]** B; **[6]** D; **[7]** D; **[8]** A; **[9]** A; **[10]** Consultare un libro di testo.

Esercizi

[11] a) Sia $c \in \mathbb{R}$ fissato. La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0, +\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t^2 + 1$ per ogni $t \in]0, +\infty[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{3}{2}t^2 + \left(\ln t + t\frac{1}{t}\right) + c = \frac{3}{2}t^2 + \ln t + 1 + c,$$

$$\frac{y(t)}{t} + t^2 + 1 = \left(\frac{t^2}{2} + \ln t + c\right) + t^2 + 1 = \frac{3}{2}t^2 + \ln t + 1 + c.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t^2 + 1$ per ogni $t \in]0, +\infty[$, dunque y è soluzione.

b) Sostituendo si trova $y(1) = 1/2 + c$. Dev'essere allora $1/2 + c = 2$ ovvero $c = 3/2$.

[12] Il primo integrale:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3^x}{12} - \frac{2}{1+x} - 2x^5\right) dx &= \frac{1}{12}\int 3^x\,dx - 2\int \frac{1}{1+x}\,dx - 2\int x^5\,dx \\ &= \frac{3^x}{12\ln 3} - 2\ln|1+x| - \frac{x^6}{3} + c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale: integrando per parti due volte, si ha

$$\begin{aligned}\int (3z^2 - 2z + 1)\cos z\,dz &= (3z^2 - 2z + 1)\operatorname{sen} z - \int (6z - 2)\operatorname{sen} z\,dz \\ &= (3z^2 - 2z + 1)\operatorname{sen} z - \left((6z-2)(-\cos z) - \int 6(-\cos z)\,dz\right) \\ &= (3z^2 - 2z + 1)\operatorname{sen} z + (6z - 2)\cos z - 6\operatorname{sen} z + c \\ &= (3z^2 - 2z - 5)\operatorname{sen} z + (6z - 2)\cos z + c.\end{aligned}$$

[13] a) Il denominatore si annulla per $x = -1/3$, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile.

b) Poiché il numeratore è sempre positivo si ha facilmente che g è positiva per $x > -1/3$ e negativa per $x < -1/3$. La funzione non si annulla mai.

c) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \left[\frac{e^{-\infty}}{-\infty}\right] = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{3} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to(-1/3)^\pm} g(x) = \left[\frac{e^{-2/3}}{0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

d) Da c) si deduce che la retta $x = -1/3$ è un asintoto verticale, mentre la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$. Cerchiamo gli eventuali asintoti obliqui a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2+x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{6x+1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x}}{6} = +\infty,$$

perciò non esistono asintoti obliqui a $+\infty$.

e) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{e^{2x}2(3x+1) - e^{2x}3}{(3x+1)^2} = \frac{e^{2x}}{(3x+1)^2}(6x-1),$$

perciò si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]1/6, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1/6, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty, -1/3[\cup]-1/3, 1/6[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]1/6, +\infty[$, decrescente su $]-\infty, -1/3[$ e su $]-1/3, 1/6[$. In $x = 1/6$ ammette un minimo relativo.

[14] Al primo si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-3\operatorname{sen}x) - 4x}{5e^{2x} - 7\cos x + 2} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{-3\cos x}{1-3\operatorname{sen}x} - 4}{10e^{2x} + 7\operatorname{sen}x} = \left[\frac{-3-4}{10+0}\right] = -\frac{7}{10}.$$

Il secondo:

$$\lim_{s\to1} \frac{\arccos(s/2) - 2\operatorname{sen}(-\pi/(s+1))}{\ln\sqrt{s+1}} = \frac{\arccos\frac{1}{2} - 2\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})}{\ln\sqrt{2}} = \frac{\pi/3 - 2(-1)}{\frac{1}{2}\ln 2} = \frac{2\pi+12}{3\ln 2}.$$

[15] Il dominio di h è rappresentato dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 1 - \log_4(x^2 - x - 2) \geq 0. \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per $x > 2$ oppure $x < -1$. La seconda disequazione è equivalente a:

$$1 \geq \log_4(x^2 - x - 2) \iff 4^1 \geq 4^{\log_4(x^2-x-2)} \iff$$

$$\iff 4 \geq x^2 - x - 2 \iff x^2 - x - 6 \leq 0,$$

per cui le soluzioni sono date dagli $x \in [-2, 3]$.

L'insieme delle soluzioni del sistema, e quindi il dominio di h, è dato da $[-2, -1[\cup]2, 3]$.

[16] Consultare un libro di testo.