Corsi di Laurea in Scienze P.A. e Igiene S.A.
A.A. 2003/2004
Esame di Matematica del 21 settembre 2004

NOME	*COGNOME*	*MATRICOLA*

CORSO DI LAUREA	*ORDINAMENTO*
	N.O. | *V.O.*

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Test di Teoria

1 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{3^2 - x}{1 - 2x}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

2 Il dominio $\mathcal{D}$ e l'immagine $\mathcal{I}$ della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ sono

- A $\mathcal{D} =]-\pi/2, \pi/2[, \quad \mathcal{I} =]-1, 1[$
- B $\mathcal{D} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{I} =]-\pi/2, \pi/2[$
- C $\mathcal{D} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{I} =]-1, 1[$
- D $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{I} = \mathbb{R}$

3 La funzione $g(x) = \cos x$ è

- A crescente su $\mathbb{R}$
- B crescente su $]0, \pi[$
- C decrescente su $]0, \pi[$
- D decrescente su $\mathbb{R}$

4 Per definizione, la derivata di f in x_0 è

- A l'area della regione delimitata dal grafico, dalle rette $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 - \delta$ e dall'asse x
- B la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$
- C il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$
- D nessuna delle precedenti

5 L'integrale definito di una funzione f su $[a, b]$ rappresenta

- A l'area della regione delimitata dal grafico, dalle rette $x = a$, $x = b$ e dall'asse x
- B la totalità delle primitive di f
- C la lunghezza del grafico di f in $[a, b]$
- D l'area della regione delimitata dal grafico, dalle rette $y = a$, $y = b$ e dall'asse y

6 Se f è una funzione derivabile due volte su $]a,b[$ e vale $f''(x) < 0$ su $]a,b[$, allora

A f è decrescente su $]a,b[$

B f è crescente su $]a,b[$

C f è convessa su $]a,b[$

D f è concava su $]a,b[$

7 L'equazione differenziale $y'' = 2y' - 3y + t^3$ è

A un'equazione lineare del primo ordine

B un'equazione lineare del secondo ordine

C un'equazione non lineare del primo ordine

D un'equazione non lineare del secondo ordine

8 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)g(x)}$ è

A $+\infty$

B $-\infty$

C 0

D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

9 Una funzione è iniettiva se

A corrispondenti distinti provengono da elementi uguali

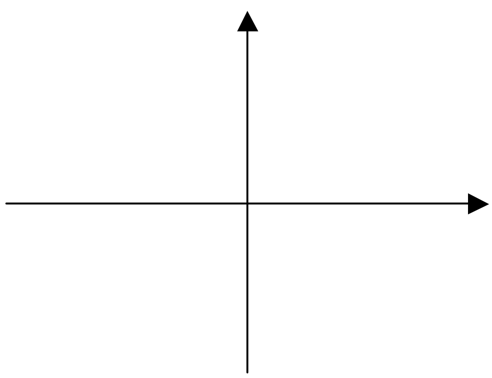
B a elementi distinti corrispondono elementi distinti

C a elementi uguali corrispondono elementi uguali

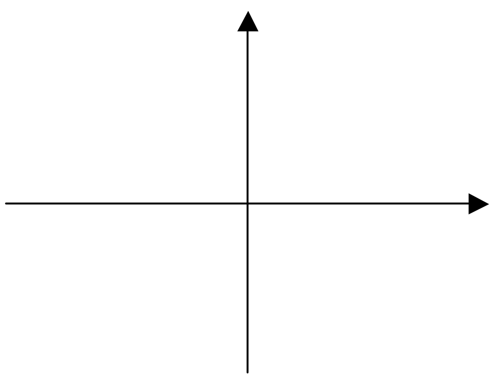
D nessuna delle precedenti

10 Rappresentare qualitativamente i grafici delle seguenti funzioni elementari:

$h_1(x) = \log_{7/4} x$



$h_2(x) = \operatorname{arcsen} x$



Esercizi

$\boxed{\textbf{11}}$ Verificare che la funzione $y(t) = \sqrt{\operatorname{sen} t + 2}$ è soluzione su $]0, \pi[$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{(y^2 - 2)\cos t}{2y \operatorname{sen} t}.$$

$\boxed{\textbf{12}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3\cos x}{5 + \operatorname{sen} x} - \frac{x^6}{2} \right) dx \qquad\qquad \int t^2 e^{-2t}\, dt.$$

$\boxed{\textbf{13}}$ Sia data la funzione $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

a) determinare il dominio di g;

b) studiare il segno della funzione;

c) calcolare i limiti di g negli eventuali punti di discontinuità e agli estremi del dominio;

d) determinare gli eventuali asintoti;

e) calcolare la derivata prima e determinare gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli eventuali punti di massimo o minimo relativo/assoluto per la funzione;

f) tracciare qualitativamente il grafico di g.

$\boxed{\textbf{14}}$ Risolvere i seguenti limiti

$$\lim_{t \to 0} \frac{3t^2 \cos t - \ln(e^t + t)}{2t - 5 \operatorname{sen} t}, \qquad\qquad \lim_{y \to 1} \frac{\ln(2 - y) - 3 \operatorname{arctg} y}{3 \operatorname{sen}(\pi(y - 2)) - 1}.$$

Solamente per gli studenti del vecchio ordinamento

$\boxed{\textbf{15}}$ Enunciare e dimostrare il Teorema degli zeri.

Soluzioni dei Problemi dell'appello del 21 settembre 2004

Test di teoria

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ C; $\boxed{4}$ C; $\boxed{5}$ A; $\boxed{6}$ D; $\boxed{7}$ B; $\boxed{8}$ D; $\boxed{9}$ B; $\boxed{10}$ Consultare un libro di testo.

Esercizi

$\boxed{11}$ a) La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0,\pi[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \frac{(y^2(t)-2)\cos t}{2y(t)\,\mathrm{sen}\, t}$ per ogni $t \in]0,\pi[$. Si ha

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{sen}\, t + 2}} \cos t,$$

$$\frac{(y^2(t)-2)\cos t}{2y(t)\,\mathrm{sen}\, t} = \frac{((\mathrm{sen}\, t+2)-2)\cos t}{2\sqrt{\mathrm{sen}\, t+2}\ \mathrm{sen}\, t} = \frac{\cos t}{2\sqrt{\mathrm{sen}\, t+2}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \frac{(y^2(t)-2)\cos t}{2y(t)\,\mathrm{sen}\, t}$ per ogni $t \in]0,\pi[$, dunque y è soluzione.

$\boxed{12}$ Il primo integrale:

$$\int \left(\frac{3\cos x}{5+\mathrm{sen}\, x} - \frac{x^6}{2}\right) dx = 3\int \frac{1}{5+\mathrm{sen}\, x}\,(5+\mathrm{sen}\, x)'\,dx - \frac{1}{2}\int x^6\,dx$$
$$= 3\ln(5+\mathrm{sen}\, x) - \frac{x^7}{14} + c.$$

Il secondo integrale: integrando per parti due volte, si ha

$$\int t^2 e^{-2t}\,dt = t^2\frac{e^{-2t}}{-2} - \int 2t\frac{e^{-2t}}{-2}\,dt = -\frac{t^2e^{-2t}}{2} + \int te^{-2t}\,dt = -\frac{t^2e^{-2t}}{2} + t\frac{e^{-2t}}{-2} - \int \frac{e^{-2t}}{-2}\,dt$$
$$= -\frac{t^2e^{-2t}}{2} - \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} = -(2t^2+2t+1)\frac{e^{-2t}}{4}.$$

$\boxed{13}$ a) Il dominio è dato dagli x per cui $x^2-5x+4 \neq 0$, da cui $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{1,4\}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile.

b) Il numeratore è positivo se $x \geq 0$, il denominatore è positivo se $x<1$ oppure $x>4$. Si ha quindi

$$g(x)\begin{cases} >0, & \text{se } x\in]0,1[\cup]4,+\infty[,\\ =0, & \text{se } x=0,\\ <0, & \text{se } x\in]-\infty,0[\cup]1,4[. \end{cases}$$

c) Si ha facilmente (limite di funzione razionale) $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ e

$$\lim_{x\to1^\pm} g(x) = \left[\frac{1}{0^\mp}\right] = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to4^\pm} g(x) = \left[\frac{4}{0^\pm}\right] = \pm\infty.$$

d) Dal punto c) si vede immediatamente che la retta $y=0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$ e che le rette $x=1$ e $x=4$ sono asintoti verticali.

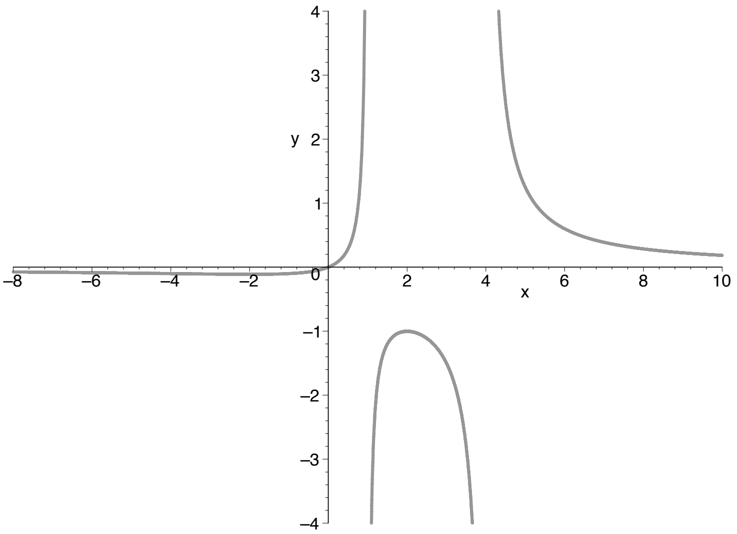
e) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{x^2-5x+4-x(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2-5x+4)^2},$$

perciò, limitatamente al dominio, $g'(x) \geq 0$ se e solo se $4 - x^2 \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-2,1[\cup]1,2[, \\ = 0, & \text{se } x = -2 \text{ oppure } x = 2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-\infty,-2[\cup]2,4[\cup]4,+\infty[, \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente su $]-2,1[$ e su $]1,2[$, decrescente su $]-\infty,-2[$, su $]2,4[$ e su $]4,+\infty[$. In $x=-2$ e $x=2$ ammette, rispettivamente, un minimo e un massimo relativo.



14 Al primo si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{3t^2\cos t - \ln(e^t + t)}{2t - 5\,\mathrm{sen}\, t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{6t\cos t - 3t^2\,\mathrm{sen}\, t - \frac{e^t+1}{e^t+t}}{2 - 5\cos t} = \frac{0-0-2}{2-5} = \frac{2}{3}.$$

Il secondo

$$\lim_{y\to 1} \frac{\ln(2-y) - 3\,\mathrm{arctg}\, y}{3\,\mathrm{sen}(\pi(y-2)) - 1} = \frac{\ln 1 - 3\,\mathrm{arctg}\, 1}{3\,\mathrm{sen}(-\pi) - 1} = \frac{0 - 3\pi/4}{0-1} = \frac{3\pi}{4}.$$

15 Consultare un libro di testo.