Corsi di Laurea in Scienze P.A. e Igiene S.A.
A.A. 2003/2004
Esame di Matematica del 2 settembre 2004

NOME	*COGNOME*	*MATRICOLA*

CORSO DI LAUREA	*ORDINAMENTO*
	N.O. | *V.O.*

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Test di Teoria

1 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1-4x+x^2}{3}$ rappresenta

A una retta

B una parabola

C un'iperbole

D nessuna delle precedenti

2 Il dominio $\mathcal{D}$ e l'immagine $\mathcal{I}$ della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ sono

A $\mathcal{D} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

B $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{I} = \mathbb{R}$

C $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{I} = \mathbb{R}$

D $\mathcal{D} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

3 La funzione $g(x) = \log_{4/5} x$ è

A crescente su $\mathbb{R}$

B crescente su $]0, +\infty[$

C decrescente su $]0, +\infty[$

D crescente su $]0, 1[$ e decrescente su $]1, +\infty[$

4 L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

A $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

B $x = x_0 + f'(x_0)(y - x_0)$

C $y = f'(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$

D nessuna delle precedenti

5 Se F è una primitiva di f su $]a, b[$, allora

A $F'(x) = f'(x)$ per ogni $x \in]a, b[$

B $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in]a, b[$

C $f'(x) = F(x)$ per ogni $x \in]a, b[$

D nessuna delle precedenti

$\boxed{\mathbf{6}}$ Se f è una funzione derivabile su $]a, b[$ tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

$\boxed{\text{A}}$ x_0 è sempre punto di minimo relativo per f

$\boxed{\text{B}}$ x_0 è sempre punto di massimo relativo per f

$\boxed{\text{C}}$ x_0 è sempre punto di flesso relativo per f

$\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti

$\boxed{\mathbf{7}}$ L'equazione differenziale $y' = 2y^2t + 8t$ è

$\boxed{\text{A}}$ un'equazione lineare del primo ordine

$\boxed{\text{B}}$ un'equazione lineare del secondo ordine

$\boxed{\text{C}}$ un'equazione non lineare del primo ordine

$\boxed{\text{D}}$ un'equazione non lineare del secondo ordine

$\boxed{\mathbf{8}}$ Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -5$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ è

$\boxed{\text{A}}$ $-\infty$

$\boxed{\text{B}}$ $+\infty$

$\boxed{\text{C}}$ 0

$\boxed{\text{D}}$ non ci sono elementi sufficienti per rispondere

$\boxed{\mathbf{9}}$ Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è crescente se

$\boxed{\text{A}}$ per ogni $x < y$ si ha $f(x) \geq f(y)$

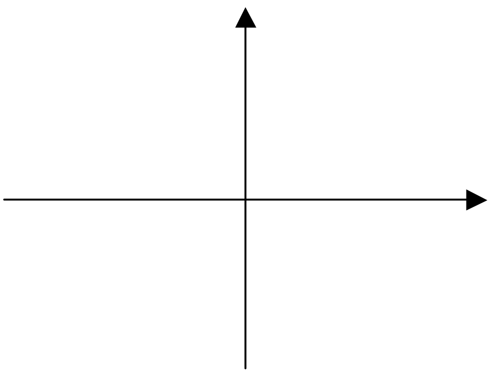
$\boxed{\text{B}}$ per ogni $x < y$ si ha $f(x) \leq f(y)$

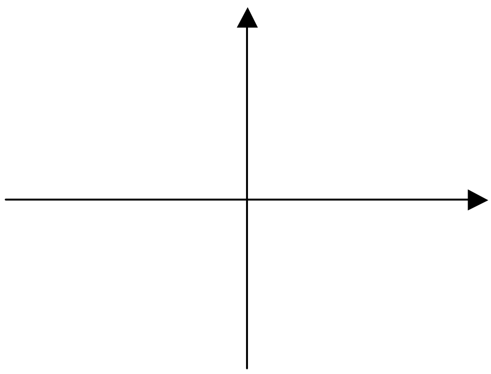
$\boxed{\text{C}}$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per ogni x

$\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti

$\boxed{\mathbf{10}}$ Rappresentare qualitativamente i grafici delle seguenti funzioni elementari:

$$h_1(x) = (3/7)^x \qquad\qquad h_2(x) = \frac{x-1}{x-2}$$





Esercizi

$\boxed{\mathbf{11}}$ Verificare che la funzione $y(t) = 1+\frac{1}{t^2}$ è soluzione su $]0, +\infty[$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{ty(1-y)}{t^2+1}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{7}{3}x^5 - \cos(2x) + \frac{1-2x}{1+x-x^2}\right) dx \qquad\qquad \int (t^2 - t + 2)\ln t\, dt.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia data la funzione $g(x) = (2x^2 - x + 1)e^x$

a) determinare il dominio di g;

b) studiare il segno della funzione;

c) calcolare i limiti di g negli eventuali punti di discontinuità e agli estremi del dominio;

d) calcolare la derivata prima e determinare gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli eventuali punti di massimo o minimo relativo/assoluto per la funzione;

e) calcolare la derivata seconda e determinare gli intervalli di convessità e concavità;

f) tracciare qualitativamente il grafico di g.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Risolvere i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pi} \frac{3\operatorname{sen} x + \cos(5x) + 1}{x^2 - \pi x}, \qquad\qquad \lim_{t\to 0} \frac{5\operatorname{arctg} t - 2\sqrt{1+t^2}}{4e^t - 1}.$$

Solamente per gli studenti del vecchio ordinamento

$\boxed{\mathbf{15}}$ Enunciare e dimostrare il Teorema dei due carabinieri (di compressione).

Soluzioni dei Problemi dell'appello del 2 settembre 2004

Test di teoria

$\boxed{1}$ B; $\boxed{2}$ B; $\boxed{3}$ C; $\boxed{4}$ A; $\boxed{5}$ B; $\boxed{6}$ B; $\boxed{7}$ C; $\boxed{8}$ D; $\boxed{9}$ B; $\boxed{10}$ Consultare un libro di testo.

Esercizi

$\boxed{11}$ a) La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $]0,+\infty[$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \frac{2ty(t)(1-y(t))}{t^2+1}$ per ogni $t \in]0,+\infty[$. Si ha

$$y'(t) = -\frac{2}{t^3},$$

$$\frac{2ty(t)(1-y(t))}{t^2+1} = \frac{2t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{t^2+1} = \frac{2t\frac{1}{t^2}\left(t^2+1\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{t^2+1} = -\frac{2}{t^3}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \frac{2ty(t)(1-y(t))}{t^2+1}$ per ogni $t \in]0,+\infty[$, dunque y è soluzione.

$\boxed{12}$ Il primo integrale:

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{7}{3}x^5 - \cos(2x) + \frac{1-2x}{1+x-x^2}\right) dx \\
&\qquad = \frac{7}{3}\int x^5\,dx - \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\,dx + \int \frac{1}{1+x-x^2}(1+x-x^2)'\,dx \\
&\qquad = \frac{7}{18}x^6 - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x) + \ln|1+x-x^2| + c.
\end{aligned}$$

Il secondo integrale: integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}
\int (t^2-t+2)\ln t\,dt &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t\right)\ln t - \int \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t\right)\frac{1}{t}\,dt \\
&= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t\right)\ln t - \int \left(\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} + 2\right)dt \\
&= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t\right)\ln t - \frac{t^3}{9} + \frac{t^2}{4} - 2t + c.
\end{aligned}$$

$\boxed{13}$ a) Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile.

b) Si ha facilmente che $g \geq 0$ se $2x^2 - x + 1 \geq 0$ che è sempre verificato.

c) Si ha $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+1}{e^{-x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{-e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{e^{-x}} = 0,$$

quindi la retta $x = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

d) La derivata prima è

$$g'(x) = (4x-1)e^x + (2x^2-x+1)e^x = (2x^2+3x)e^x,$$

perciò $g'(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2 + 3x \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, 0[\cup]-3/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3/2 \text{ oppure } x = 0, \\ < 0, & \text{se } x \in]-3/2, 0[, \end{cases}$$

quindi la funzione è decrescente su $]-3/2, 0[$, crescente su $]-\infty, 0[$ e su $]-3/2, +\infty[$. In $x = -3/2$ e $x = 0$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo.

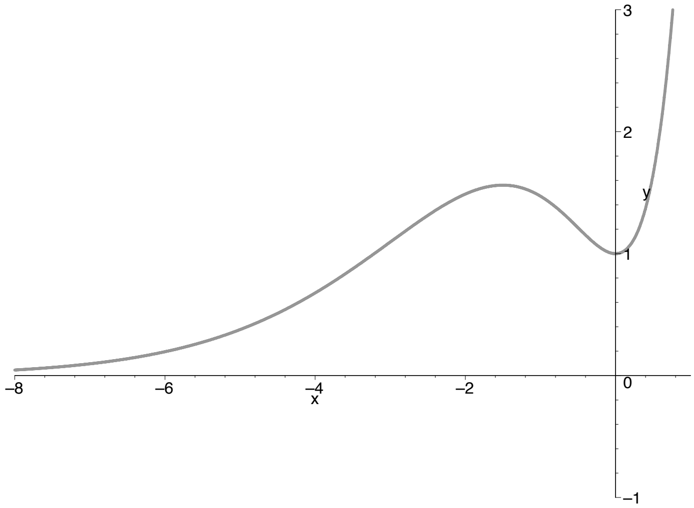
e) La derivata seconda è

$$g''(x) = (4x+3)e^x + (2x^2+3x)e^x = (2x^2+7x+3)e^x,$$

perciò $g''(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2+7x+3 \geq 0$ cioè se e solo se $x \leq -3$ oppure $x \geq -1/2$. Si ottiene

$$g''(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -3[\cup]-1/2, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3 \text{ oppure } x = -1/2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-3, -1/2[, \end{cases}$$

quindi la funzione è concava su $]-3, -1/2[$, convessa su $]-\infty, -3[$ e su $]-1/2, +\infty[$. In $x = -1/2$ e $x = -3$ ammette due punti di flesso.



$\boxed{\mathbf{14}}$ Al primo si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{3\,\mathrm{sen}\, x + \cos(5x) + 1}{x^2 - \pi x} = \left[\frac{0-1+1}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{3\cos x - 5\,\mathrm{sen}(5x)}{2x - \pi} = -\frac{3}{\pi}.$$

Il secondo

$$\lim_{t\to 0} \frac{5\,\mathrm{arctg}\, t - 2\sqrt{1+t^2}}{4e^t - 1} = \frac{5\,\mathrm{arctg}\, 0 - 2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Consultare un libro di testo.