Corsi di Laurea in Scienze P.A. e Igiene S.A.
A.A. 2003/2004
Esame di Matematica del 1 luglio 2004

NOME	*COGNOME*	*MATRICOLA*

CORSO DI LAUREA	*ORDINAMENTO*
	N.O. | V.O.

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

Test di Teoria

1 Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{5}{1-2x}$ rappresenta

- A una retta
- B una parabola
- C un'iperbole
- D nessuna delle precedenti

2 Il dominio $\mathcal{D}$ e l'immagine $\mathcal{I}$ della funzione $f(x) = (2/3)^{-x}$ sono

- A $\mathcal{D} = [0, +\infty[,\ \ \mathcal{I} = \mathbb{R}$
- B $\mathcal{D} = [0, +\infty[,\ \ \mathcal{I} =]0, +\infty[$
- C $\mathcal{D} = \mathbb{R},\ \ \mathcal{I} = \mathbb{R}$
- D $\mathcal{D} = \mathbb{R},\ \ \mathcal{I} =]0, +\infty[$

3 La funzione $g(x) = \operatorname{arctg} x$ è

- A crescente su $\mathbb{R}$
- B decrescente su $\mathbb{R}$
- C crescente su $]-\pi/2, 0[$ e decrescente su $]0, \pi/2[$
- D decrescente su $\mathbb{R}$ su $]-\pi/2, 0[$ e crescente su $]0, \pi/2[$

4 Per definizione, la derivata di f in x_0 rappresenta

- A il valore $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- B il coefficiente angolare della retta tangente per il punto $(x_0, f(x_0))$
- C il termine noto dell'equazione della retta tangente per il punto $(x_0, f(x_0))$
- D nessuna delle precedenti

5 L'integrale indefinito di una funzione positiva f su $[a, b]$ rappresenta

- A la retta congiungente i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$
- B la lunghezza del grafico di f
- C l'area della regione delimitata dal grafico, dalle rette $y = a$, $y = b$ e dall'asse y
- D nessuna delle precedenti

6 Se f è una funzione derivabile su $]a, b[$ tale che $f'(x_0) < 0$ con $x_0 \in]a, b[$, allora

- A x_0 è sempre punto di minimo relativo per f
- B x_0 è sempre punto di massimo relativo per f
- C x_0 è sempre punto di flesso relativo per f
- D nessuna delle precedenti

7 L'equazione differenziale $y'' = t^2 y - 3$ è

- A un'equazione lineare del primo ordine
- B un'equazione lineare del secondo ordine
- C un'equazione non lineare del primo ordine
- D un'equazione non lineare del secondo ordine

8 Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è

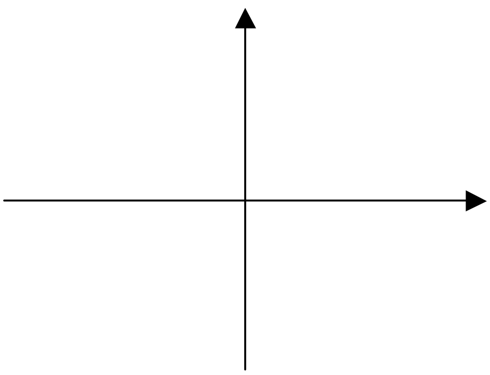
- A $-\infty$
- B 0
- C non esiste
- D non ci sono elementi sufficienti per rispondere

9 Una funzione è biiettiva se

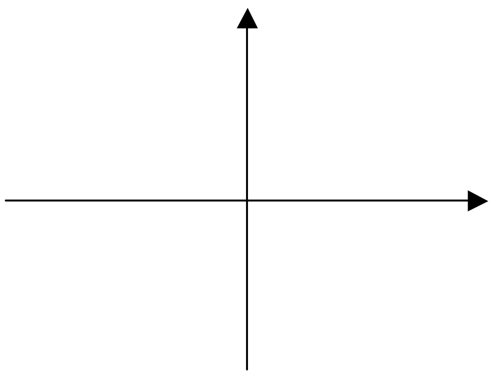
- A a un unico elemento del dominio corrisponde un elemento del codominio
- B a ogni elemento del dominio corrisponde un unico elemento del codominio
- C ogni elemento del codominio è il corrispondente di un unico elemento del dominio
- D nessuna delle precedenti

10 Rappresentare qualitativamente i grafici delle seguenti funzioni elementari:

$h_1(x) = \log_{3/5} x$



$h_2(x) = \operatorname{tg} x$



Esercizi

$\boxed{\mathbf{11}}$ Verificare che la funzione $y(t) = e^{\sqrt{3t^2+1}}$ è soluzione su $\mathbb{R}$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{3ty}{\ln y}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Calcolare i seguenti integrali

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - 2\cos(5x) + \frac{1}{x-5} \right) dx \qquad\qquad \int e^{2t}(3t^2 - t)\, dt.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Sia data la funzione $g(x) = \dfrac{6x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$

a) determinare il dominio di g;

b) studiare il segno della funzione;

c) calcolare i limiti di g negli eventuali punti di discontinuità e agli estremi del dominio;

d) determinare gli eventuali asintoti;

e) calcolare la derivata prima e determinare gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli eventuali punti di massimo o minimo relativo/assoluto per la funzione;

f) tracciare qualitativamente il grafico di g.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Risolvere i seguenti limiti

$$\lim_{y\to 1} \frac{\sqrt{2-y^2} - \operatorname{sen}(\pi y)}{3y^2 - e^{1-y}}, \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x} - \cos(3x) + 5x}{4\ln(1+x) - 3x^2}.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Trovare il dominio della funzione $h(x) = \log_3 \left(1 - e^{(2x^2-3)}\right)$

Solamente per gli studenti del vecchio ordinamento

$\boxed{\mathbf{16}}$ Enunciare e dimostrare il Teorema di unicità del limite.

Soluzioni dei Problemi dell'appello del 1 luglio 2004

Test di teoria

$\boxed{1}$ C; $\boxed{2}$ D; $\boxed{3}$ A; $\boxed{4}$ B; $\boxed{5}$ D; $\boxed{6}$ D; $\boxed{7}$ B; $\boxed{8}$ B; $\boxed{9}$ C; $\boxed{10}$ Consultare un libro di testo.

Esercizi

$\boxed{11}$ a) La funzione $y(t)$ è definita e derivabile su $\mathbb{R}$ ed è soluzione dell'equazione se verifica $y'(t) = \frac{3ty(t)}{\ln y(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$y'(t) = e^{\sqrt{3t^2+1}} \frac{1}{2\sqrt{3t^2+1}} 6t = \frac{3te^{\sqrt{3t^2+1}}}{\sqrt{3t^2+1}},$$

$$\frac{3ty(t)}{\ln y(t)} = \frac{3te^{\sqrt{3t^2+1}}}{\ln e^{\sqrt{3t^2+1}}} = \frac{3te^{\sqrt{3t^2+1}}}{\sqrt{3t^2+1}}.$$

In conclusione si ha che $y'(t) = \frac{3ty(t)}{\ln y(t)}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque y è soluzione.

$\boxed{12}$ Il primo integrale:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{x^5} - 2\cos(5x) + \frac{1}{x-5} \right) dx &= 3\int x^{-5}\, dx - \frac{2}{5}\int 5\cos(5x)\, dx + \int \frac{1}{x-5}\, dx \\ &= -\frac{3}{4}x^{-4} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}(5x) + \ln|x-5| + c.\end{aligned}$$

Il secondo integrale: integrando per parti due volte, si ha

$$\begin{aligned}\int e^{2t}(3t^2 - t)\, dt &= (3t^2 - t)\frac{e^{2t}}{2} - \int \frac{e^{2t}}{2}(6t-1)\, dt \\ &= (3t^2 - t)\frac{e^{2t}}{2} - \left((6t-1)\frac{e^{2t}}{4} - \int 6\frac{e^{2t}}{4}\, dt \right) \\ &= (3t^2 - t)\frac{e^{2t}}{2} - (6t-1)\frac{e^{2t}}{4} + \frac{3}{4}e^{2t} + c = (3t^2 - 4t + 2)\frac{e^{2t}}{2} + c.\end{aligned}$$

$\boxed{13}$ a) Il denominatore non si annulla mai, perciò il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, ed ivi la funzione è continua e derivabile.

b) Poiché il denominatore è sempre positivo si ha facilmente che $g \geq 0$ se $6x^2 - x - 1 \geq 0$ cioè $-1/3 \leq x$ oppure $x \geq 1/2$.

c) Si ha facilmente $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 6$ (limite di funzione razionale).

d) Da c) si deduce che la retta $y = 6$ è un asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

e) La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{(12x-1)(x^2-1) - (6x^2 - x - 1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 14x - 1}{(x^2+1)^2},$$

perciò $g'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 14x - 1 \geq 0$. Si ottiene

$$g'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-\infty, -7-\sqrt{50}[\cup]-7+\sqrt{50}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -7 \pm \sqrt{50}, \\ < 0, & \text{se } x \in]-7-\sqrt{50}, -7+\sqrt{50}[, \end{cases}$$

quindi la funzione è decrescente su $]-7-\sqrt{50}, -7+\sqrt{50}[$, crescente su $]-\infty, -7-\sqrt{50}[$ e su $]-7+\sqrt{50}, +\infty[$. In $x=-7-\sqrt{50}$ e $x=-7+\sqrt{50}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo.

14 Il primo

$$\lim_{y\to 1} \frac{\sqrt{2-y^2}-\operatorname{sen}(\pi y)}{3y^2-e^{1-y}} = \frac{1-\operatorname{sen}\pi}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

Al secondo si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x}-\cos(3x)+5x}{4\ln(1+x)-3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2\operatorname{sen} x}2\cos x+3\operatorname{sen}(3x)+5}{4\frac{1}{1+x}-6x} = \left[\frac{2+0+5}{4-0}\right] = \frac{7}{4}.$$

15 Il dominio di h è dato dalle soluzioni di $1-e^{(2x^2-3)}>0$ cioè $1>e^{(2x^2-3)}$ che equivale a $0>2x^2-3$. Il dominio è dunque $\mathcal{D}=]-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}[$.

16 Consultare un libro di testo.