Università degli Studi di Udine   Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 30 gennaio 2004

Esercizio 1. Calcolare approssimatamente, dopo averne verificato l'esistenza, lo zero della funzione $f_1(x) = x^3 + x - 4$ nell'intervallo $[1, 2]$ con un errore inferiore a $1/16$.

Esercizio 2. Dimostrare che la funzione $f_2(x) = 4x^4 + x - 1$ ammette uno zero x_0 nell'intervallo $[-1, 0]$ e un altro zero x_1 nell'interrvallo $[0, 1]$ (si potrebbe anche dimostrare che tali zeri sono unici). Calcolare infine approssimatamente x_0 e x_1 con un errore inferiore a $1/20$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\right) < 0$$

Allora f ammette uno zero.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Allora f ammette uno zero.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L^-, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L^+$$

con $L^-, L^+ \in \mathbb{R}$, allora f ammette almeno un punto fisso (ovvero un $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.) (Suggerimento: utilizzare opportunamente l'esercizio 3) alla funzione $g(x) = x - f(x)$.)

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

e tale che assuma valori di segno opposto, ovvero esistano a, b tale che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Dimostrare che f possiede minimo e massimo assoluti su tutto $\mathbb{R}$.