Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 23 gennaio 2004

Esercizio 1. Siano $a \in]0,1[$ e $\bar{y} \in [0, \sqrt{a}\,]$. Dimostrare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}\left(a - y_n^2\right) \\ y_0 = \bar{y} \end{cases}$$

converge a $\sqrt{a}$ per $n \to \infty$. (Suggerimento: provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le due relazioni $0 \leq y_n \leq \sqrt{a}$ e $y_n \leq y_{n+1}$.)
Verificare inoltre che l'errore $E_n = \left|y_n - \sqrt{a}\right|$ soddisfa

$$E_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2}\right) E_n$$

Esercizio 2. (Avanzato) Dimostrare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} z_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + z_n} \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

converge a $\sqrt{2}$ per $n \to \infty$. Più precisamente

i) provare che, se la successione converge ad un limite finito e positivo, tale limite è necessariamente $\sqrt{2}$;

ii) dimostrare per induzione che $z_n > 1$ per ogni n;

iii) verificare le relazioni

$$z_{n+2} = \frac{4 + 3z_n}{3 + 2z_n}, \qquad 2 - z_{n+2}^2 = \frac{2 - z_n^2}{(3 + 2z_n)^2},$$

ed utilizzarle per dimostrare per induzione che la successione di indice dispari è sempre minore di $\sqrt{2}$, quella di indice pari è invece maggiore, cioè, visto che $z_n > 0$, si ha

$$z_{2n+1}^2 \leq 2, \quad \text{mentre} \quad z_{2n}^2 \geq 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

iv) utilizzare la prima delle relazioni in iii) per verificare che

$$z_{n+2} - z_n = \frac{2(2 - z_n^2)}{3 + 2z_n},$$

e dedurre che la successione di indice dispari è crescente mentre quella di indice pari è decrescente, ovvero

$$z_{2n+1} \leq z_{2(n+1)+1} \quad \text{mentre} \quad z_{2n} \geq z_{2(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

v) utilizzare il teorema sul limite delle successioni monotone per dedurre che le successioni di indice pari e dispari (e quindi l'intera successione) convergono ad un numero compreso tra $z_0 = 1$ e $z_1 = 3/2$, ed utilizzare i) per concludere che il limite è proprio $\sqrt{2}$.

Verificare inoltre che l'errore $F_n = |\sqrt{2} - z_n|$ soddisfa

$$F_{n+1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + z_n} F_n \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} F_n.$$