Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Analisi Matematica

Appello del 20 settembre 2004

Cognome e Nome — Matricola

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Consegnare anche il presente testo.

1 Risolvere i seguenti limiti

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x+2x^2)-3x^2+e^x\operatorname{sen}(3x)}{5\operatorname{tg}x-\ln(1+2x)},\qquad \textbf{b)}\ \lim_{z\to 0}\frac{\ln(e^{z-3}-5\operatorname{sen}z)+2\cos z}{z\operatorname{tg}z},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cos(x-x^2)-1-\operatorname{sen}(2x+x^2)}{x\ln(1+x)-3\operatorname{sen}(x^2)}.$$

2 Data la funzione $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+6x+5}{x-1}\right)$

a) trovare il dominio di definizione e i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare il segno della funzione; **c)** calcolare la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o globale della funzione; **d)** tracciare l'andamento qualitativo del grafico di f.

3 Si calcoli, ad esempio col metodo per parti, l'integrale indefinito di $g(x)=(x^2-3x)e^{-x}$.

4 Si studi la convergenza delle serie

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^{3/2}+5n^2+1}{7n^2+n^{5/2}+4},\qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2e^n}{n!},$$

5 Determinare il dominio e i punti critici della funzione $h(x,y)=x^2y^2-2x-2y+6$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Punteggi: 3+3+4, 4+4+4+2, 4, 3+3, 3

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 20 settembre 2004

$\boxed{\textbf{1a}}$ Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+2x^2) - 3x^2 + e^x \operatorname{sen}(3x)}{5\operatorname{tg} x - \ln(1+2x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+4x}{1+(x+2x^2)^2} - 6x + e^x \operatorname{sen}(3x) + 3e^x \cos(3x)}{\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{1+2x}}$$
$$= \frac{1-0+0+3}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

$\boxed{\textbf{1b}}$ Il limite si presenta nella forma $[\frac{-1}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $z=0$. Il numeratore tende a -1 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere negativo in un intorno di 0. Il denominatore è positivo se $z \operatorname{tg} z > 0$, quindi è positivo in un intorno puntato di 0. Perciò

$$\lim_{z\to 0} \frac{\ln(e^{z-3} - 5\operatorname{sen} z) + 2\cos z}{z \operatorname{tg} z} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty.$$

$\boxed{\textbf{1c}}$ Si può applicare due volte de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\cos(x-x^2) - 1 - \operatorname{sen}(2x+x^2)}{x\ln(1+x) - 3\operatorname{sen}(x^2)}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}\cos(x-x^2) - e^{2x}(1-2x)\operatorname{sen}(x-x^2) - (2+2x)\cos(2x+x^2)}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} - 6x\cos(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \Big(4e^{2x}\cos(x-x^2) - 4e^{2x}(1-2x)\operatorname{sen}(x-x^2) + 2e^{2x}\operatorname{sen}(x-x^2) -$$
$$- e^{2x}(1-2x)^2\cos(x-x^2) - 2\cos(2x+x^2) + (2+2x)^2\operatorname{sen}(2x+x^2)\Big)/$$
$$/\left(\frac{1}{1+x} + \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} - 6\cos(x^2) + 12x^2\operatorname{sen}(x^2)\right) = \left[\frac{4-0+0-1-2+0}{1+1-6+0}\right] = -\frac{1}{4}.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 2 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x + o(x), \quad \operatorname{sen} x = x + o(x^2), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

si ottiene

$$\cos(x-x^2) = 1 - \frac{(x-x^2)^2}{2} + o\big((x-x^2)^2\big) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
$$e^{2x}\cos(x-x^2) = \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o\big((2x)^2\big)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$
$$\operatorname{sen}(2x+x^2) = 2x + x^2 + o\big((2x+x^2)^2\big) = 2x + x^2 + o(x^2),$$
$$x\ln(1+x) = x\big(x + o(x)\big) = x^2 + o(x^2), \qquad \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^2).$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ è

$$\mathrm{Num}(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - \big(2x + x^2 + o(x^2)\big) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

e quello del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ è

$$\mathrm{Den}(x) = x^2 + o(x^2) - 3\big(x^2 + o(x^2)\big) = -2x^2 + o(x^2).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\cos(x - x^2) - 1 - \operatorname{sen}(2x + x^2)}{x\ln(1+x) - 3\operatorname{sen}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-2 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{4}.$$

Il limite richiesto vale allora $-1/4$.

$\boxed{2}$ **a)** La funzione è definita quando il denominatore delle frazione non si annulla (ovvero quando $x \neq 1$), e quando l'argomento del logaritmo è positivo, ovvero $\frac{x^2+6x+5}{x-1} > 0$. Il denominatore è positivo se $x > 1$ mentre il numeratore è positivo se $x < -5$ oppure $x > -1$. Si deduce che l'argomento del logaritmo è positivo quando $-5 < x < -1$ oppure $x > 1$. Perciò il dominio è $\mathcal{D} =]-5, -1[\cup]1, +\infty[$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \big[\ln(+\infty)\big] = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \left[\ln\left(\frac{12}{0^+}\right)\right] = \big[\ln(+\infty)\big] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \big[\ln 0^+\big] = -\infty, \qquad \lim_{x\to -5^+} f(x) = \big[\ln 0^+\big] = -\infty.$$

b) La funzione è positiva quando l'argomento del logaritmo è maggiore di 1, cioè

$$\frac{x^2+6x+5}{x-1} \geq 1 \iff \frac{x^2+5x+6}{x-1} \geq 0.$$

Il numeratore di quest'ultima frazione è positivo per $x < -3$ oppure $x > -2$. In definitiva

$$f(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-3, -2[\cup]1, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = -3 \text{ oppure } x = -2, \\ < 0, & \text{se } x \in]-5, -3[\cup]-2, -1[. \end{cases}$$

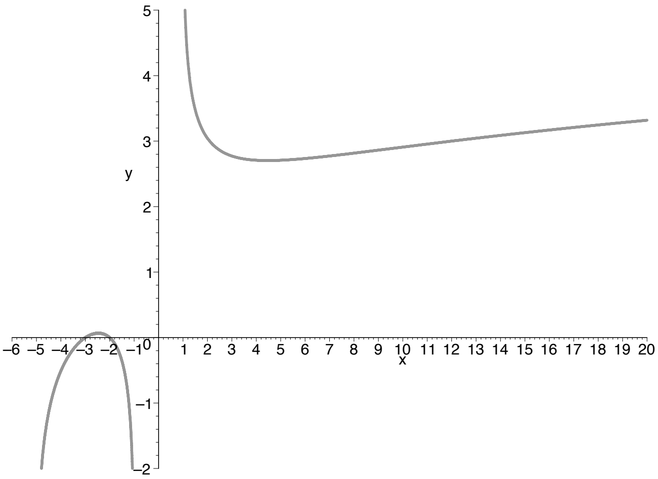
c) La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+6x+5}{x-1}} \cdot \frac{(2x+6)(x-1) - (x^2+6x+5)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 11}{(x^2+6x+5)(x-1)}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo sul dominio, la derivata è positiva quando $x^2 - 2x - 11 \geq 0$, quindi

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]-5, 1-\sqrt{12}[\cup]1+\sqrt{12}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = 1-\sqrt{12} \text{ oppure } x = 1+\sqrt{12}, \\ < 0, & \text{se } x \in]1-\sqrt{12}, -1[\cup]1, 1+\sqrt{12}[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente su $]-5, 1-\sqrt{12}[$ e su $]1+\sqrt{12}, +\infty[$, decrescente su $]1-\sqrt{12}, -1[$ e su $]1, 1+\sqrt{12}[$. In $x = 1-\sqrt{12}$ e $x = 1+\sqrt{12}$ ammette, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo. La funzione non ammette massimo o minimo globale.



$\boxed{\mathbf{3}}$ Applicando due volte il metodo per parti, si ha

$$\int (x^2-3x)e^{-x} = (x^2-3x)(-e^{-x}) - \int (2x-3)(-e^{-x})\,dx = -(x^2-3x)e^{-x} + \int (2x-3)e^{-x}\,dx$$

$$= -(x^2-3x)e^{-x} - (2x-3)e^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx$$

$$= -(x^2-3x)e^{-x} - (2x-3)e^{-x} - 2e^{-x} = (1+x-x^2)e^{-x} + c.$$

$\boxed{\mathbf{4a}}$ Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{5n^2}{n^{5/2}} = \frac{5}{n^{1/2}}$ che è il termine generale di una serie divergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è divergente.

$\boxed{\mathbf{4b}}$ Utilizzando il criterio del rapporto si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)^2 e^{n+1}}{(n+1)!}\right) \Big/ \left(\frac{n^2 e^n}{n!}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{e}{n} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Dunque la serie converge.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 2 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} xy^2 = 1, \\ x^2y = 1. \end{cases}$$

Dalla prima si ricava $x = 1/y^2$ che sostituita nella seconda porta a $1/y^3 = 1$ che ha come unica soluzione $y = 1$. Si ottiene quindi un unico punto critico $P = (1, 1)$.

Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy,$$

perciò l'Hessiano nel $P = (1, 1)$ è

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Poiché $H(1,1) < 0$, si deduce che P è un punto di sella.