Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/2004

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in T.W.M.

Analisi Matematica

Appello del 7 settembre 2004

Cognome e Nome | Matricola

Non è ammesso l'uso di libri, appunti e calcolatrici. Consegnare anche il presente testo.

1 Risolvere i seguenti limiti

$$\textbf{a)}\ \lim_{s\to 2}\frac{\ln s - 3\,\mathrm{tg}(\pi s)}{s^2-5s+6},\qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{arcsen}\,x-\mathrm{sen}(5x)}{\sqrt{1+3x}+e^x-2\cos x},$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+\mathrm{sen}\,x)e^x-2x\cos(x-x^2)-1}{\mathrm{arcsen}(2x-x^2)+\ln(1+4x^2)-2x}.$$

2 Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

a) trovare il dominio di definizione e i limiti agli estremi del dominio; **b)** studiare il segno della funzione; **c)** calcolare la derivata prima, gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e/o globale della funzione; **d)** calcolare la derivata seconda e trovare gli intervalli di convessità/concavità; **e)** tracciare l'andamento qualitativo del grafico di f.

3 Si calcoli, ad esempio utilizzando il metodo per parti, l'integrale indefinito di $g(x)=\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}$.

4 Si studi la convergenza delle serie

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n^{3/2}+3n^2+1}{n^2+2+5n^4},\qquad \textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\,\mathrm{arctg}\,n}{3n+4}\right)^{2n},$$

5 Determinare il dominio e i punti critici della funzione $h(x,y)=x^3+5y^2-5xy^2+x^2-3$. Dire se sono max/min relativi o punti di sella.

Punteggi: 3+3+4, 3+2+3+3+2, 4, 3+3, 4

Soluzioni dei Problemi dell'Appello del 7 settembre 2004

$\boxed{\textbf{1a}}$ Il limite si presenta nella forma $[\frac{\ln 2}{0}]$. Studiamo dunque il segno della funzione vicino a $s = 2$. Il numeratore tende a 2 quindi, per il Teorema della permanenza del segno, risulta essere positivo in un intorno di 2. Il denominatore è positivo se $s^2 - 5s + 6 > 0$ ovvero se $s > 3$ oppure $s < 2$. Allora la funzione è negativa in un intorno destro di 2 e positiva in un intorno sinistro di 2. Si conclude che

$$\lim_{s\to 2^\pm} \frac{\ln s - 3\operatorname{tg}(\pi s)}{s^2 - 5s + 6} = \left[\frac{\ln 2}{0^\mp}\right] = \mp\infty.$$

$\boxed{\textbf{1b}}$ Si può applicare de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen}(5x)}{\sqrt{1+3x} + e^x - 2\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 5\cos(5x)}{\frac{3}{2\sqrt{1+3x}} + e^x + 2\operatorname{sen} x} = \frac{2-5}{3/2+1+0} = -\frac{6}{5}.$$

$\boxed{\textbf{1c}}$ Si può applicare due volte de l'Hôpital (forma indeterminata $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{sen} x)e^x - 2x\cos(x-x^2) - 1}{\operatorname{arcsen}(2x-x^2) + \ln(1+4x^2) - 2x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{sen} x)e^x + e^x\cos x - 2\cos(x-x^2) + 2x(1-2x)\operatorname{sen}(x-x^2)}{\frac{2-2x}{\sqrt{1-(2x-x^2)^2}} + \frac{8x}{1+4x^2} - 2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \Bigg((1+\operatorname{sen} x)e^x + 2e^x\cos x - e^x\operatorname{sen} x + 4(1-2x)\operatorname{sen}(x-x^2) - 4x\operatorname{sen}(x-x^2) +$$

$$+ 2x(1-2x)\cos(x-x^2)\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\frac{-2\sqrt{1-(2x-x^2)^2} + (2-2x)\frac{2(2x-x^2)(2-2x)}{2\sqrt{1-(2x-x^2)^2}}}{1-(2x-x^2)^2} +$$

$$+ \frac{8(1+4x^2) - (8x)^2}{(1+4x^2)^2}\Bigg) = \left[\frac{1+2-0+0-0+0}{-2+8}\right] = \frac{1}{2}.$$

Alternativamente, si potevano usare gli sviluppi di Taylor di ordine 2 del numeratore e denominatore centrati in $x_0 = 0$. Ricordando che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \ln(1+x) = x + o(x), \qquad \operatorname{sen} x = x + o(x^2),$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + o(x^2), \qquad \cos x = 1 + o(x),$$

si ottiene

$$(1+\operatorname{sen} x)e^x = \big(1 + x + o(x^2)\big)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$x\cos(x-x^2) = x\big(1 + o(x)\big) = x + o(x^2),$$
$$\operatorname{arcsen}(2x-x^2) = 2x - x^2 + o\big((2x-x^2)^2\big) = 2x - x^2 + o(x^2),$$
$$\ln(1+4x^2) = 4x^2 + o\big(x^2\big).$$

In definitiva lo sviluppo del numeratore $\mathrm{Num}(x)$ è

$$\mathrm{Num}(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - 2(x + o(x^2)) - 1 = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

e quello del denominatore $\mathrm{Den}(x)$ è

$$\mathrm{Den}(x) = 2x - x^2 + o(x^2) + 4x^2 + o\big(x^2\big) - 2x = 3x^2 + o(x^2).$$

Il limite è allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{sen} x)e^x - 2x\cos(x-x^2) - 1}{\operatorname{arcsen}(2x-x^2) + \ln(1+4x^2) - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{3 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Il limite richiesto vale allora $1/2$.

$\boxed{2}$ **a)** Le condizioni d'esistenza sono $x > 0$ (esistenza del ln) e $\ln x \neq 0$ (denominatore diverso da 0). Il dominio è quindi $\mathcal{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1/x} = +\infty.$$

b) Sul dominio, il numeratore è sempre positivo, perciò la funzione è negativa se $x \in]0,1[$, positiva se $x > 1$.

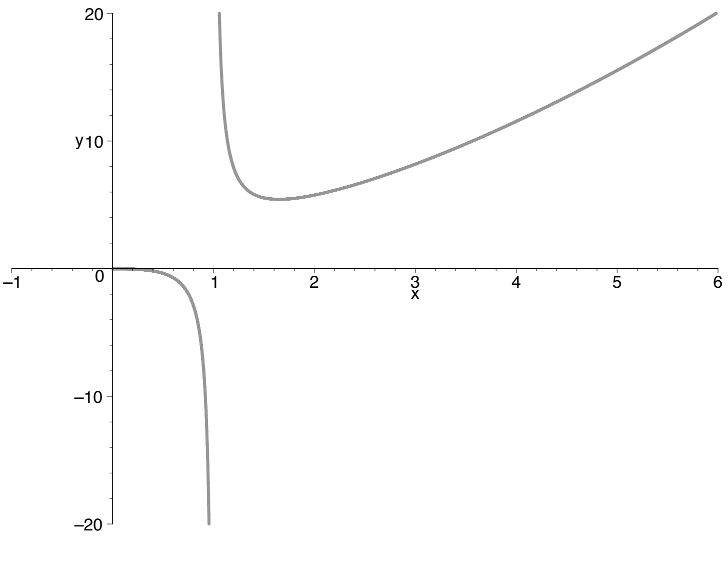
c) La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

Restringendoci al dominio, si ha che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2\ln x - 1 \geq 0$, ovvero $x \geq e^{1/2}$. Quindi

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in]e^{1/2}, +\infty[, \\ = 0, & \text{se } x = e^{1/2}, \\ < 0, & \text{se } x \in]0,1[\cup]1, e^{1/2}[. \end{cases}$$

La funzione è quindi crescente su $]e^{1/2}, +\infty[$, decrescente su $]0,1[$ e su $]1, e^{1/2}[$. In $x = e^{1/2}$ ammette un massimo relativo. La funzione non ammette massimo o minimo globale.



d) La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{(2\ln x + 2x\frac{1}{x} - 1)\ln^2 x - (2x\ln x - x)\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}.$$

Poiché $2t^2 - 3t + 2 > 0$ per ogni t, si ha che il numeratore è sempre positivo. Quindi la funzione è concava su $]0,1[$, mentre è convessa su $]1,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Applicando il metodo per parti e di seguito scomponendo la funzione razionale ottenuta, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4a}}$ Studiando l'asintoticità del termine generale a_n si vede che $a_n \sim \frac{3n^2}{5n^4} = \frac{3}{5n^2}$ che è il termine generale di una serie convergente. Per il criterio di asintoticità anche la serie data è convergente.

$\boxed{\mathbf{4b}}$ Utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n\operatorname{arctg} n}{3n+4}\right)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{3n+4}\cdot \operatorname{arctg} n\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 > 1.$$

Dunque la serie diverge.

$\boxed{5}$ Il dominio è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

I punti critici di f soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 5y^2 + 2x = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 10y - 10xy = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 + 2x = 0, \\ 10y(1-x) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda si ottiene $y = 0$ oppure $x = 1$. Se $y = 0$, sostituendo nella prima si ottiene $3x^2 + 2x = 0$ ovvero $x = 0$ oppure $x = -2/3$. Si trovano così i due punti critici $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (-2/3, 0)$.

Se invece $x = 1$, sempre sostituendo, si ottiene $5 - 5y^2 = 0$, ovvero $y = \pm 1$. Si trovano altri 2 punti critici $P_3 = (1,1)$ e $P_4 = (1,-1)$.

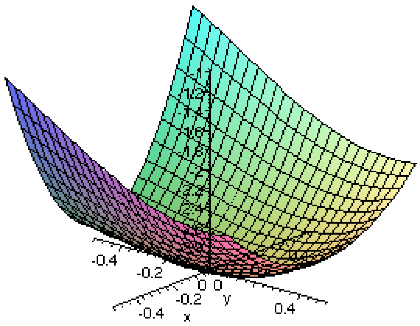
Le derivate seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10(1-x), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -10y,$$

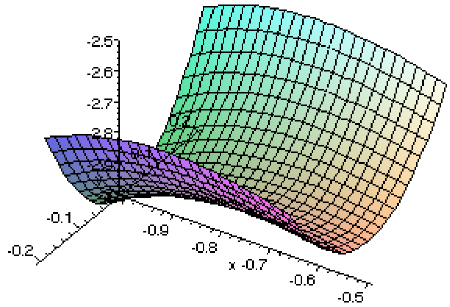
perciò l'Hessiano nel generico punto $P = (x,y)$ è

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x+2 & -10y \\ -10y & 10(1-x) \end{vmatrix} = 10(6x+2)(1-x) - 100y^2.$$

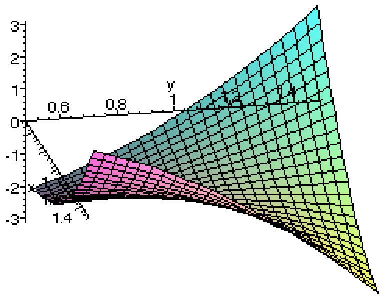
Si ha $H(1, \pm 1) = -100 < 0$ e $H(-2/3, 0) = -100/3$, quindi P_2, P_3 e P_4 sono punti di sella. Poiché $H(0, 0) = 20$ e gli elementi sulla diagonale principale sono positivi, si ha che P_1 è punto di minimo relativo.



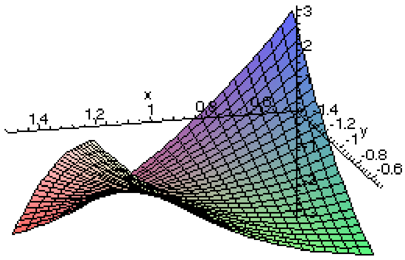
Punto P_1: minimo relativo



Punto P_2: punto di sella



Punto P_3: punto di sella



Punto P_4: punto di sella