

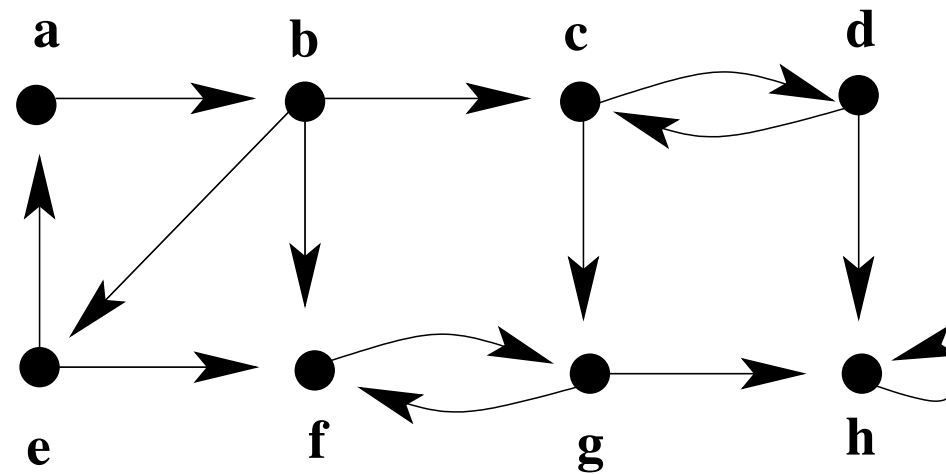
Grafi diretti

Un **grafo diretto** (o grafo orientato) G è una coppia (V, E) dove

- V è un insieme di **nodi** (o vertici);
- $E \subseteq V \times V$ è un insieme di **archi**.

Denotiamo con $n = |V|$ il numero di nodi di G , e con $m = |E|$ il numero di archi di G .

Un grafo diretto



Successori e predecessori

Dato un nodo u , i **successori** di u sono i vertici v tali che $(u, v) \in E$. Il **grado uscente** di un nodo u è il numero di successori di u .

I **predecessori** di u sono i vertici v tali che $(v, u) \in E$. Il **grado entrante** di u è il numero di predecessori di u .

Il **grado** di un nodo è la somma tra grado uscente e grado entrante del nodo.

Cammini e cicli

Un **cammino** è una sequenza di nodi collegati a due a due da archi. La lunghezza del cammino è il numero di archi del cammino.

Un cammino **semplice** è un cammino senza nodi ripetuti. Esiste sempre un cammino di lunghezza zero da un nodo a se stesso.

Un **ciclo** è un cammino da un nodo a se stesso che contiene almeno un arco.

Un ciclo è **semplice** se il cammino ottenuto togliendo dal ciclo l'ultimo nodo è semplice. Un **cappio** è un ciclo di lunghezza uno.

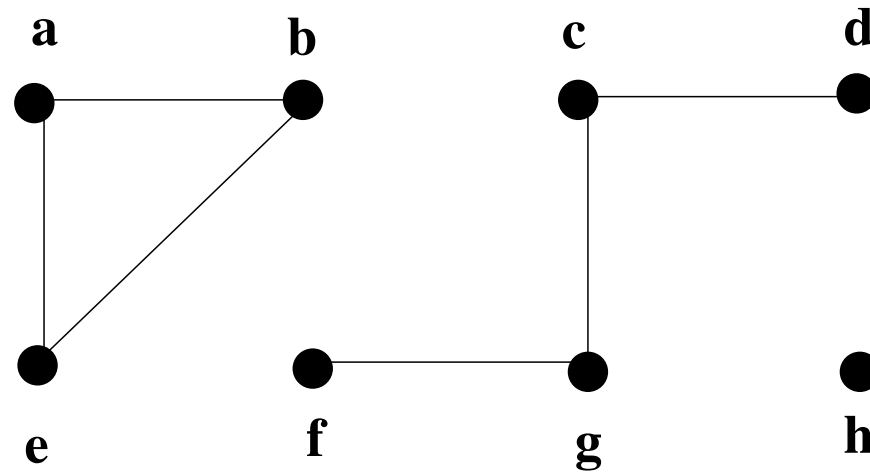
Grafi indiretti

Un **grafo diretto** (o grafo non orientato) G è una coppia (V, E) dove

- V è un insieme di **nodi** (o vertici);
- $E \subseteq V \times V$ è un insieme di **archi non orientati**.

Un **arco non orientato** è un insieme $\{u, v\}$, con $u \neq v$.

Grafo indiretto



Quesiti

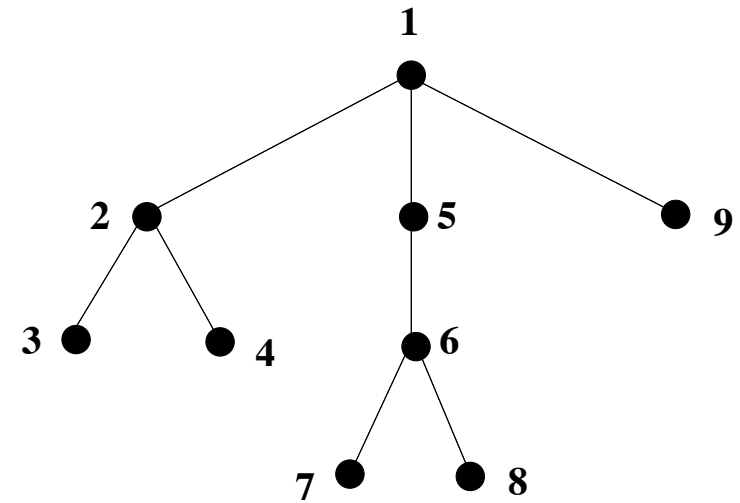
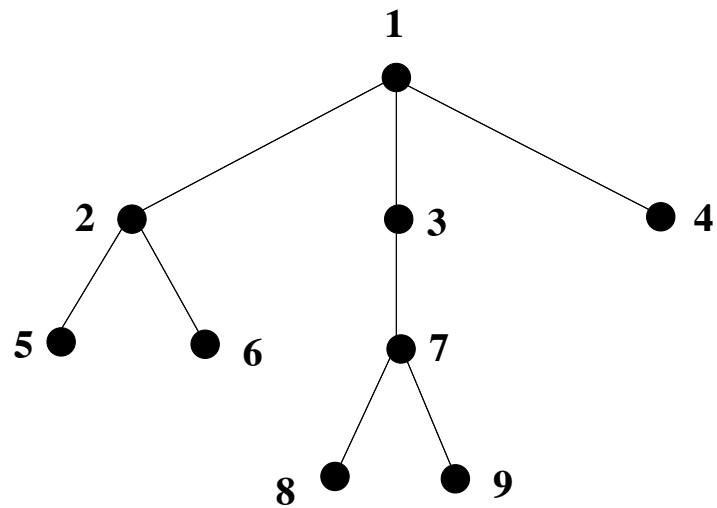
1. Qual è il numero massimo di archi di un grafo diretto di n nodi?
2. Qual è il numero massimo di archi di un grafo indiretto di n nodi?

Visite di grafi

Gli algoritmi di visita di un grafo hanno come obiettivo l'esplorazione di tutti i nodi e gli archi del grafo. Vi sono due modi principali per esplorare un grafo:

- **Visita in ampiezza:** di fratello in fratello.
- **Visita in profondità:** di padre in figlio.

Le due visite a confronto

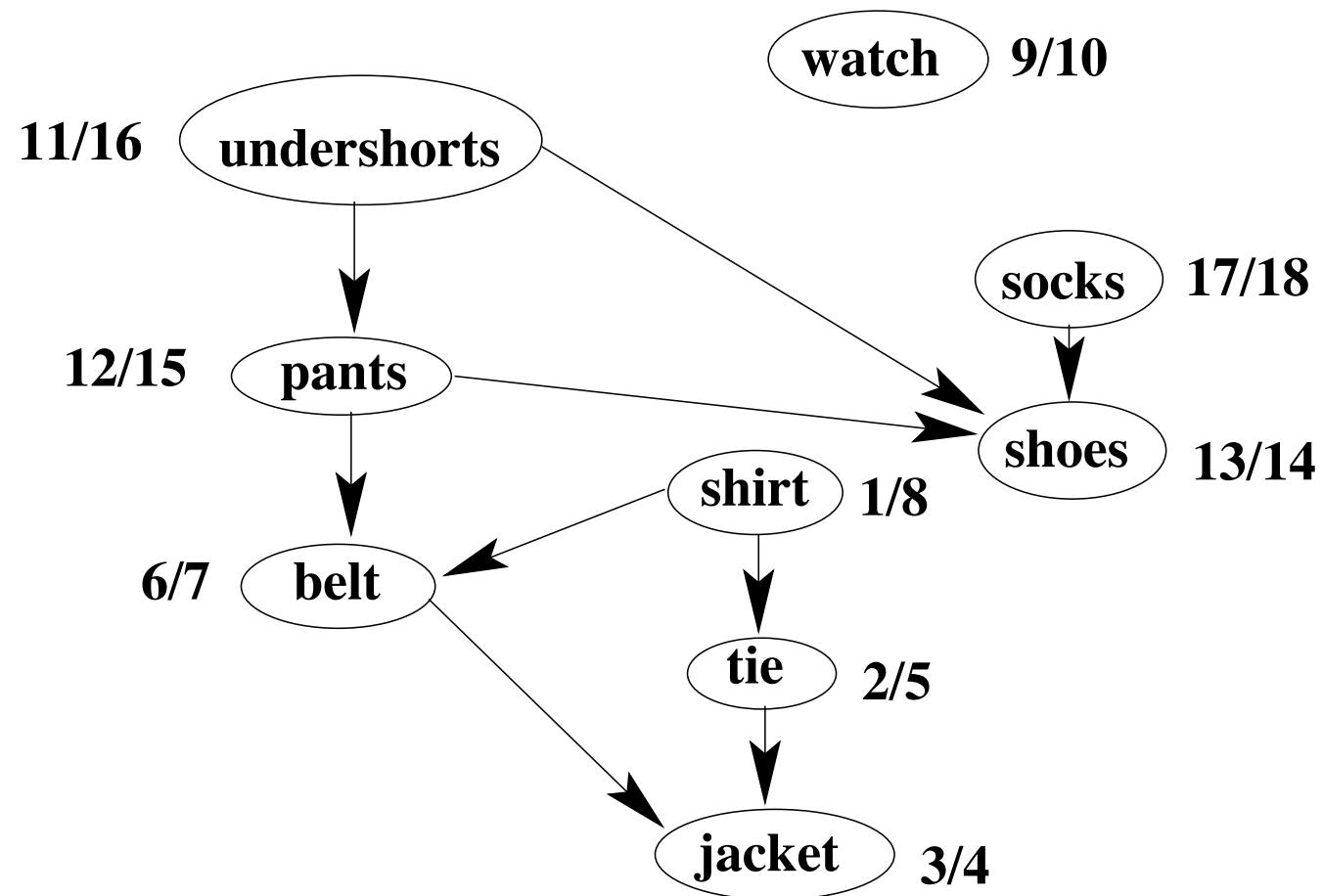


Ordinamento topologico

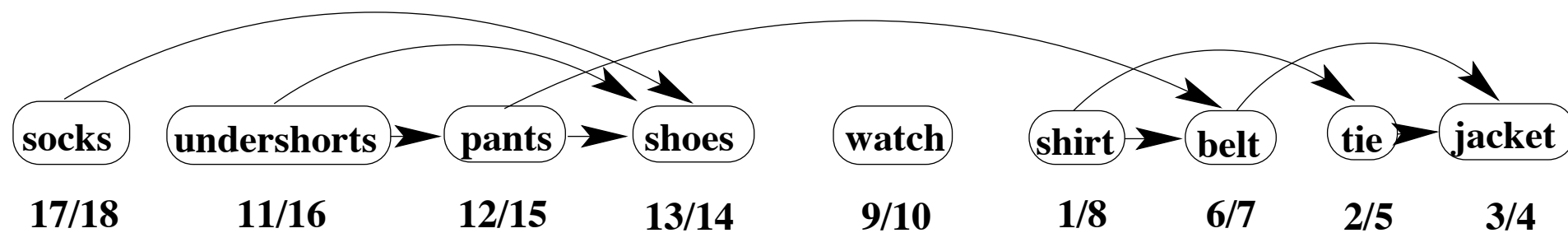
Un **DAG** è un **grafo diretto aciclico**.

Un **ordinamento topologico** di un DAG $G = (V, E)$ è un ordinamento totale $\prec$ dei suoi vertici tale che:

se $(u, v) \in E$ allora $u \prec v$.



Ordinamento topologico



Raggiungibilità

Un nodo v è **raggiungibile** da un nodo u (oppure u raggiunge v) se esiste un cammino da u a v . Definiamo due relazioni sull'insieme dei nodi:

- (a) la **relazione di raggiungibilità** $R_{\rightarrow}$ tale che $uR_{\rightarrow}v$ se v è raggiungibile da u ;
- (b) la **relazione di mutua raggiungibilità** $R_{\rightleftarrows}$ tale che $uR_{\rightleftarrows}v$ se $uR_{\rightarrow}v$ e $vR_{\rightarrow}u$.

La relazione di mutua raggiungibilità è una **relazione di equivalenza**.

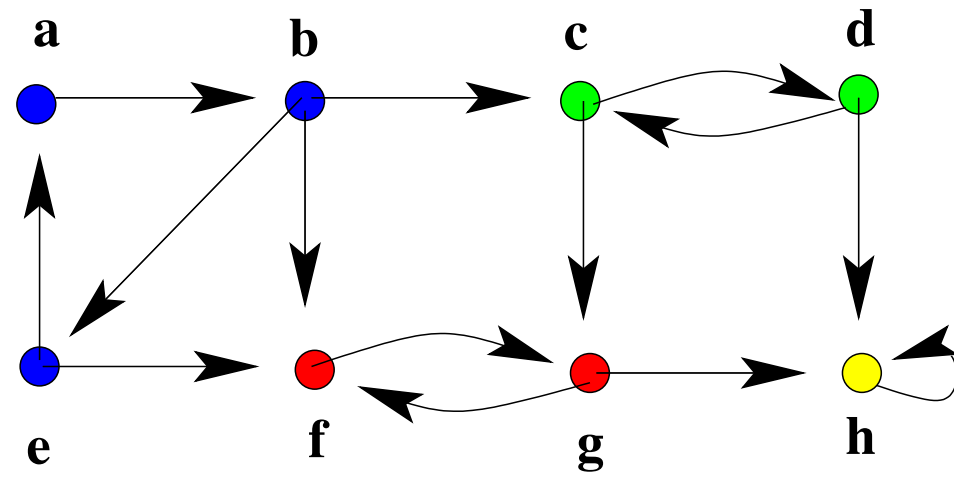
Componenti fortemente connesse

Dato un grafo diretto $G = (V, E)$, le **classi di equivalenza** della relazione di mutua raggiungibilità sono dette **componenti fortemente connesse** (CFC) del grafo.

In modo equivalente, una CFC di $G = (V, E)$ è un **insieme massimale** di vertici $U \subseteq V$ tale che ogni coppia di vertici in U è mutuamente raggiungibile.

Se $C_1, \dots, C_k$ sono le CFC di G , allora:

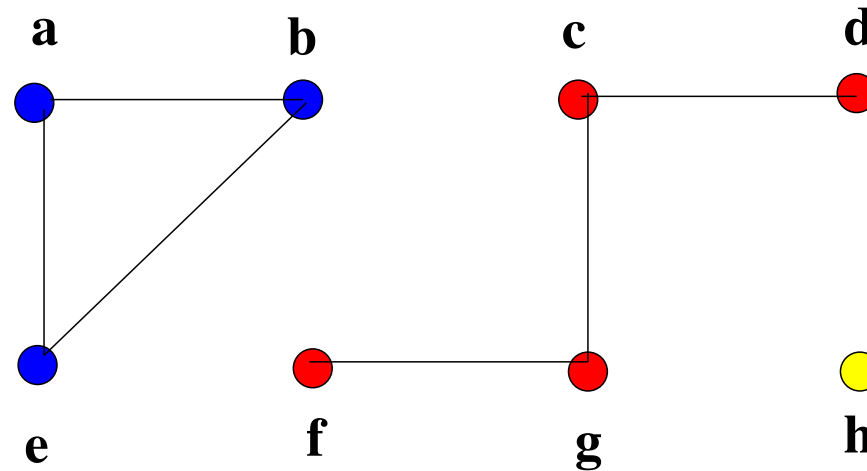
- $C_i \neq \emptyset$ per ogni i ;
- $C_i \cap C_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$;
- $\bigcup_{i=1}^k C_i = V$.



Componenti connesse

Nei grafi indiretti, la relazione di raggiungibilità $R_{\rightarrow}$ coincide con la relazione di mutua raggiungibilità $R_{\leftrightarrow}$.

Le classi di equivalenza della relazione di raggiungibilità su grafi indiretti sono dette **componenti connesse**.

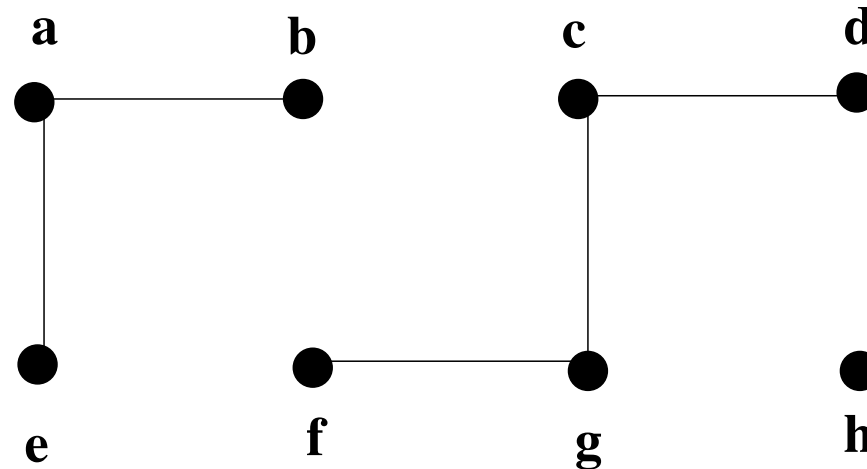


Foreste

Un grafo si dice:

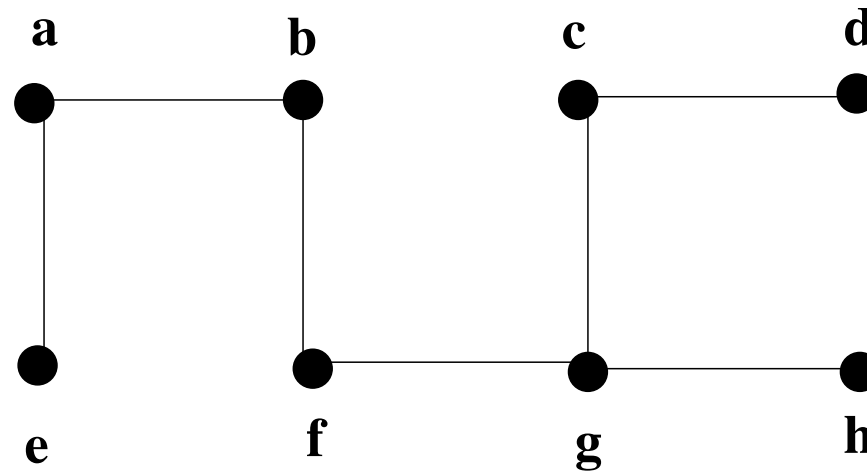
- **aciclico** se non contiene cicli;
- (fortemente) **connesso** se ammette una unica componente (fortemente) connessa.

Una **foresta** è un grafo indiretto aciclico.



Alberi

Un **albero** è un grafo indiretto aciclico e connesso.



Proprietà degli alberi

Sia $T = (V, E)$ un albero. Allora:

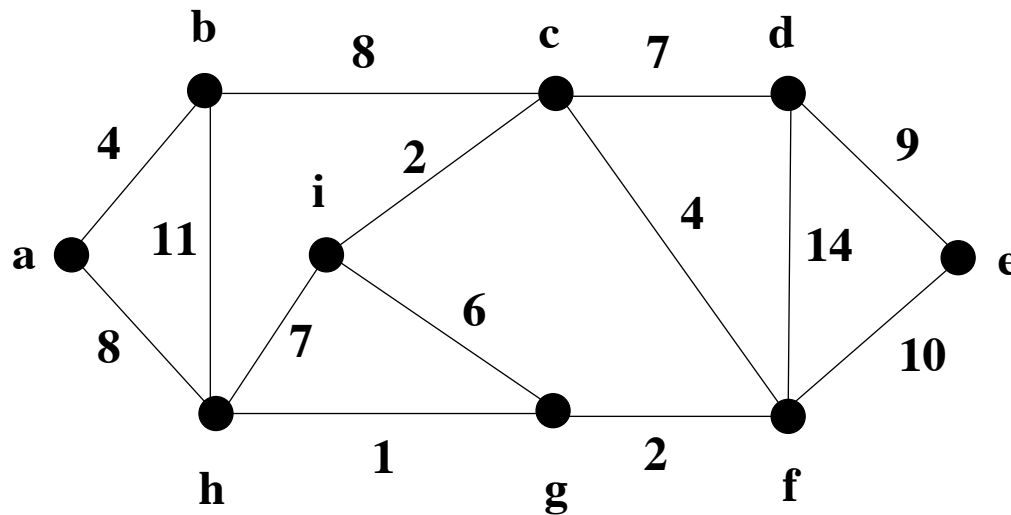
1. Ogni due nodi di T sono connessi da un unico cammino semplice.
2. Rimuovendo un arco qualsiasi da T otteniamo un grafo sconnesso.
3. Aggiungendo un arco qualsiasi a T otteniamo un grafo ciclico.
4. $|E| = |V| - 1$.

Quesiti

1. Qual è il numero di archi di un albero di n nodi?
2. Qual è il numero di archi di una foresta di n nodi e k componenti connesse?

Grafi pesati

Un **grafo pesato** è un grafo $G = (V, E, w)$, dove $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di peso che associa un numero reale chiamato peso (o costo) ad ogni arco.



Albero di supporto

Sia $G = (V, E, w)$ un grafo pesato indiretto e connesso.

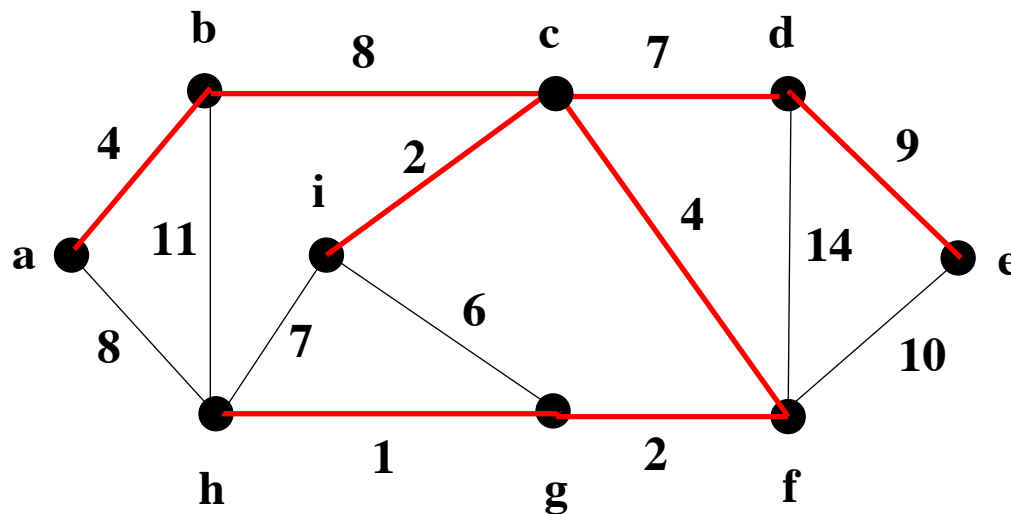
Un **albero di supporto** $T = (V, F)$ di G è un **albero** che ha come insieme dei nodi l'insieme V dei nodi del grafo e come insieme degli archi un insieme $F \subseteq E$.

Il **peso** di un albero di supporto $T = (V, F)$ è

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in F} w(u, v)$$

Albero di supporto di peso minimo

Il problema dell'albero di supporto di costo minimo consiste nel trovare un albero di supporto di G di **peso minimo**. Tale albero non è necessariamente unico.



Problema del cammino (di peso) minimo

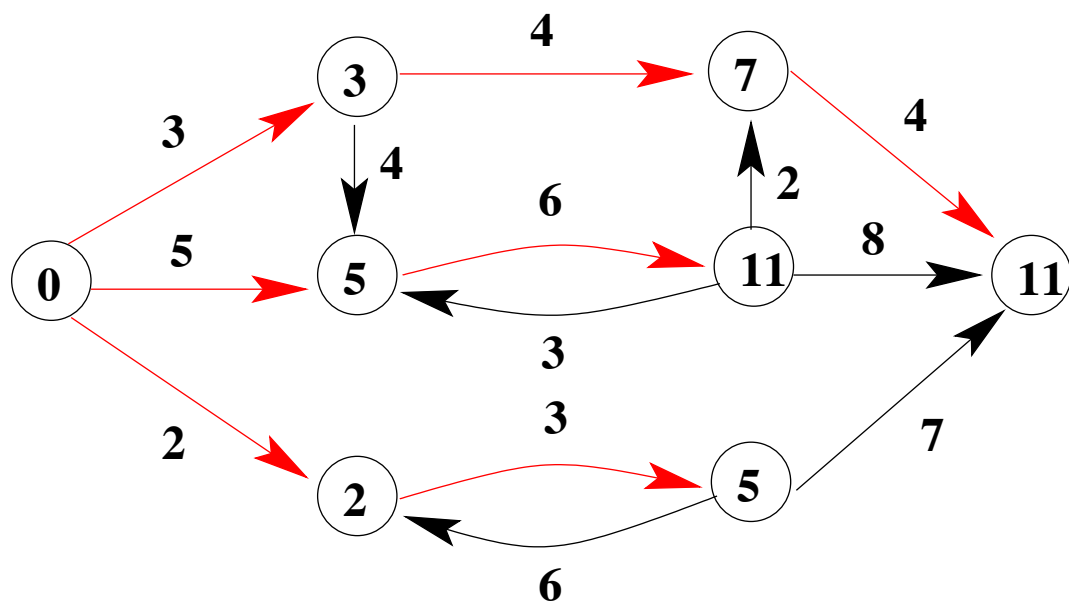
Dato un grafo diretto pesato $G = (V, E, w)$, il peso di un cammino $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ è la somma dei pesi dei propri archi,

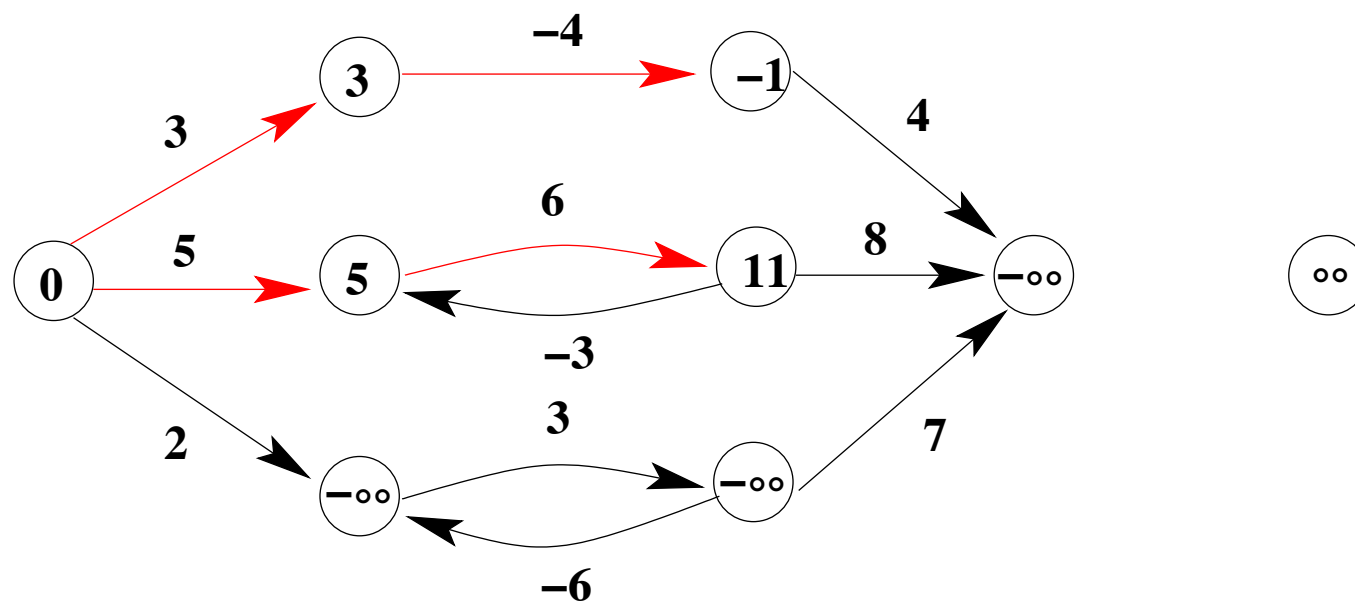
$$w(p) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

Dati due nodi u e v , un **cammino minimo** tra due nodi è, se esiste, un cammino di peso minimo che li collega.

Due varianti del problema

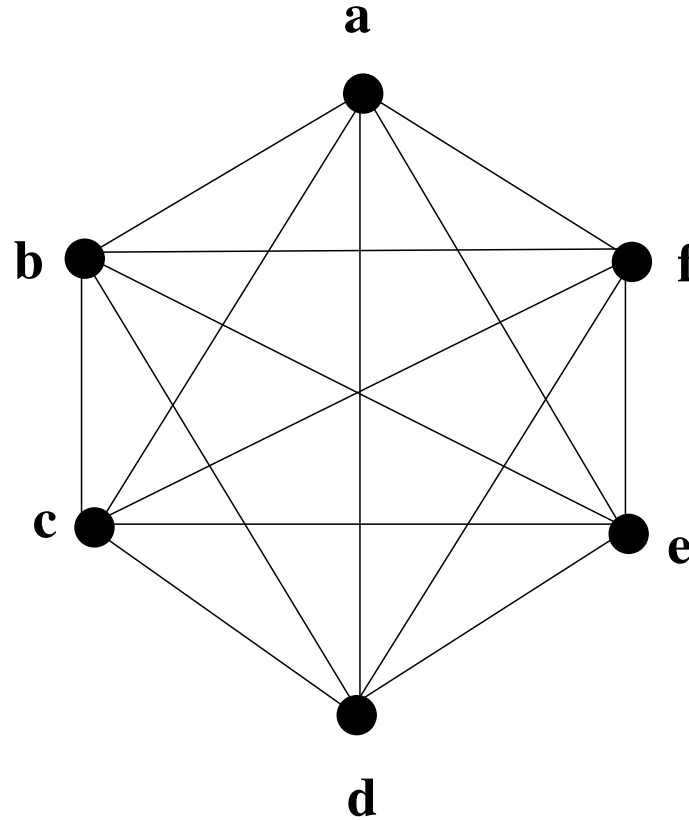
1. **Cammino minimo con una sorgente:** dato un nodo sorgente s , trovare, per ogni nodo del grafo v , un cammino minimo da s a v ;
2. **Cammino minimo per tutte le coppie di nodi:** per ogni coppia di nodi u, v del grafo trovare un cammino minimo da u a v .





Grafo completo

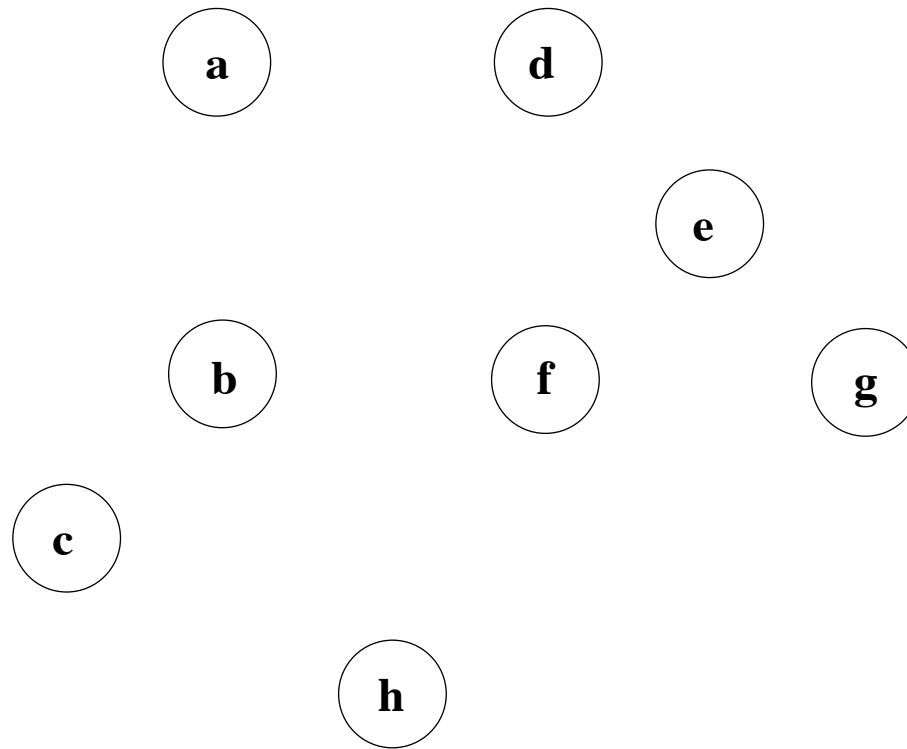
Un **grafo completo** è un grafo indiretto in cui ogni coppia di vertici distinti è connessa da un arco.

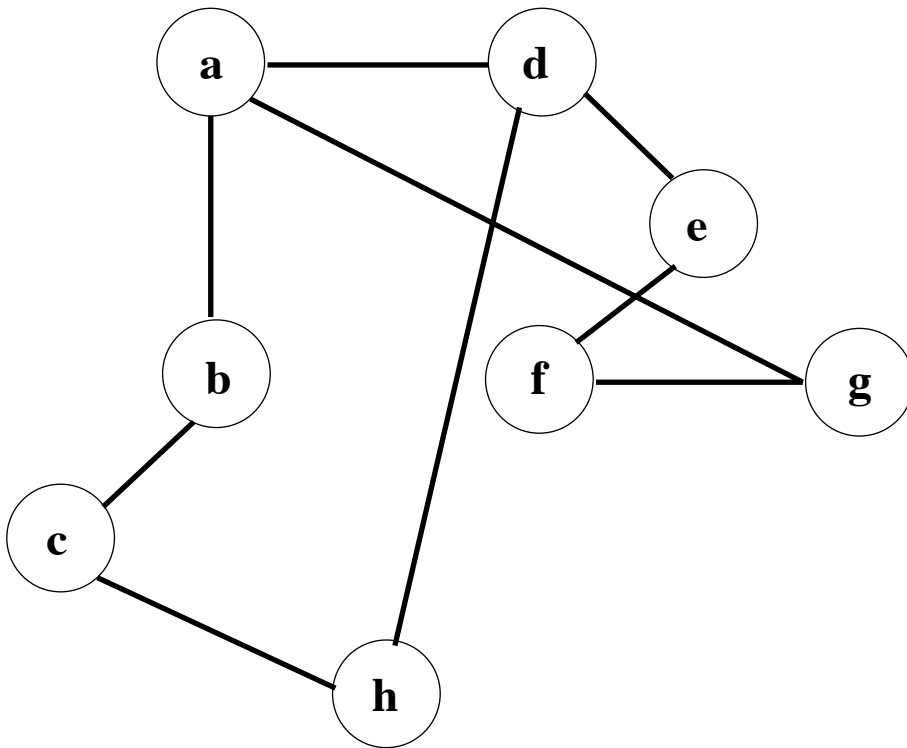


Problema del commesso viaggiatore

Dato un grafo indiretto G , un **tour** in G è un ciclo che passa esattamente una volta per ogni nodo di G .

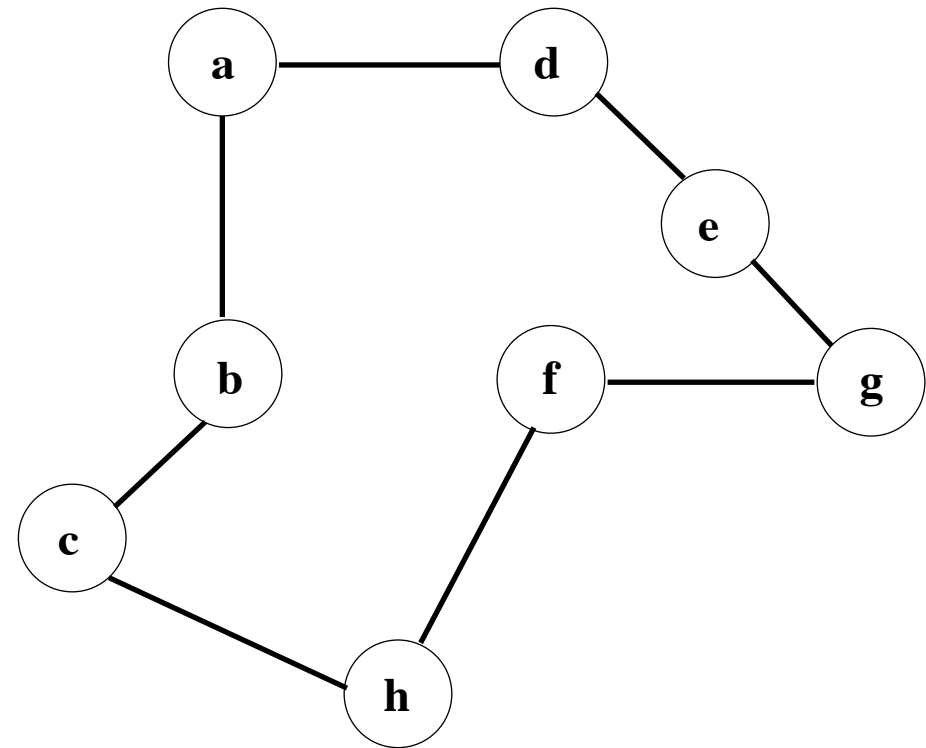
Sia G un grafo indiretto, completo e pesato con pesi non negativi. Il **problema del commesso viaggiatore** consiste nel trovare il tour in G di peso minimo.





$C = a, b, c, h, d, e, f, g, a$

$w(C) = 19,074$



$C^* = a, b, c, h, f, g, e, d, a$

$w(C^*) = 14,715$