11 Undicesima lezione: Coercività e semicontinuità di funzionali integrali

In questa lezione torniamo a considerare problemi di minimo per funzionali integrali del tipo

$$\int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx. \tag{11.1}$$

dove

$$\begin{array}{rcl} u : \Omega & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & (u_1(x), \dots, u_m(x)) \end{array}$$

(nel caso dell'energia elastica interesserà in particolare il caso $m = 3$).

Indicheremo con $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (rispettivamente $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$) lo spazio delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ tali che $u_i \in L^p(\Omega)$ (risp. $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$) per ogni $i = 1, \dots, m$.

Considereremo dapprima il caso più semplice dei funzionali definiti su $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. In questo caso il funzionale non dipende dal gradiente.

Coercività in alcuni spazi

- $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $1 < p < +\infty$ e $\tau =$topologia debole:

  $$\alpha > 0,\ \beta \geq 0,\ F(u) \geq \alpha \|u\|_p - \beta \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente coerciva;}$$

  se $F(u) = \int_\Omega f(x, u)\, dx$ la condizione diventa

  $$f(x, z) \geq \alpha |z|^p + \beta(x), \quad \alpha > 0,\ \beta \in L^1(\Omega);$$

- $L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\tau =$topologia debole:

  $$k \geq 0,\ \Phi \text{ superlineare},\ F(u) \geq \int_\Omega \Phi(|u|)\, dx - k \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente coerciva;}$$

  se $F(u) = \int_\Omega f(x, u)\, dx$ la condizione diventa

  $$f(x, z) \geq \Phi(|z|) + \beta(x),\ \beta \in L^1(\Omega);$$

- $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\tau =$topologia debole*:

  $$R > 0,\ F(u) = +\infty \text{ se } \|u\|_\infty > R \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente* coerciva;}$$

  se $F(u) = \int_\Omega f(x, u)\, dx$ la condizione diventa

  $$f(x, z) \geq \chi_{|z| \geq R}(z) + \beta(x), \quad R > 0,\ \beta \in L^1(\Omega)$$

  dove $\chi_{|z| \geq R}(z)$ è una funzione che vale 0 se $|z| \geq R$ e $+\infty$ altrimenti;

- $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ con $1 < p < +\infty$ e $\tau =$ topologia debole:

$$\alpha > 0,\ \beta \geq 0,\ F(u) \geq \alpha\|u\|_{1,p} - \beta \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente coerciva;}$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,dx$ la condizione diventa

$$f(x,z,\xi) \geq \alpha(|z|^p + |\xi|^p) + \beta(x), \quad \alpha > 0,\ \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ con $1 < p < +\infty$ e $\tau =$ topologia debole:

$$\alpha > 0,\ \beta \geq 0,\ F(u) \geq \alpha\|\nabla u\|_p - \beta \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente coerciva;}$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,dx$ la condizione diventa

$$f(x,z,\xi) \geq \alpha|\xi|^p + \beta(x), \quad \alpha > 0,\ \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole:

$$k \geq 0,\ \Phi \text{ superlineare},\ F(u) \geq \int_\Omega \Phi(|u| + |\nabla u|)\,dx - k \quad \Rightarrow \quad F \text{ deb. coerciva;}$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,dx$ la condizione diventa

$$f(x,z,\xi) \geq \Phi(|z| + |\xi|) + \beta(x),\ \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W_0^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole:

$$k \geq 0,\ \Phi \text{ superlineare},\ F(u) \geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx - k \quad \Rightarrow \quad F \text{ deb. coerciva;}$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,dx$ la condizione diventa

$$f(x,z,\xi) \geq \Phi(|\xi|) + \beta(x),\, \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole*:

$$R > 0,\ F(u) = +\infty \text{ se } \|u\|_{1,\infty} > R \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente* coerciva;}$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,dx$ la condizione diventa

$$f(x,z) \geq \chi_{|z|+|\xi|\geq R} + \beta(x), \qquad R > 0,\, \beta \in L^1(\Omega).$$

Teoremi di semicontinuità. Caso dei funzionali convessi.

Sia μ una misura positiva, finita[16] e completa[17] su una σ-algebra[18] $\mathscr{F}$ di sottoinsiemi di Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

Indicheremo con $\mathscr{B}_m$ la σ-algebra di Borel[19] di $\mathbb{R}^m$. Ricordiamo che la σ-algebra prodotto $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_m$ è la più piccola σ-algebra su $\Omega\times\mathbb{R}^m$ contenente la famiglia $\{F\times B\ :\ F\in\mathscr{F},\, B\in\mathscr{B}_m\}$.

Definizione 11.1 *Una funzione $f:\Omega\times\mathbb{R}^m\to(-\infty,+\infty]$ è detta*

(a) *un* integrando *se è $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_m$-misurabile;*[20]

(b) *un* integrando normale *se f è un integrando e $f(x,\cdot)$ è s.c.i. per μ-q.o. $x\in\Omega$;*

(c) *un* integrando convesso *se f è un integrando e $f(x,\cdot)$ è convessa e s.c.i. per μ-q.o. $x\in\Omega$;*

(d) *un* integrando di Carathéodory *se f è un integrando e $f(x,\cdot)$ è finita e continua per μ-q.o. $x\in\Omega$.*

Una funzione $f:\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\to]-\infty,+\infty]$ è detta

(e) *un* integrando normale convesso *se f è $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_m\otimes\mathscr{B}_k$-misurabile ed esiste $N\subset\Omega$ con $\mu(N)=0$ tale che*

$$f(x,\cdot,\cdot)\ \text{è s.c.i. per ogni}\ x\in\Omega\setminus N;$$
$$f(x,z,\cdot)\ \text{è convessa per ogni}\ x\in\Omega\setminus N\ \text{e}\ z\in\mathbb{R}^m.$$

Dimostrare per esercizio che esistono funzioni $g:\mathbb{R}^m\to[0,+\infty]$ convesse non s.c.i..

Supponiamo d'ora in poi, per semplicità, che $f\geq 0$, ma tutti i risultati si possono estendere a funzioni di segno non costante purché i funzionali siano ben definiti.

Teorema 11.2 *Sia $f:\Omega\times\mathbb{R}^m\to[0,+\infty]$ un integrando e*

$$F(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_\Omega f(x,u(x))\,d\mu(x) & \text{se l'integrale ha senso,}\\ +\infty & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

[16] Per semplicità di esposizione. In effetti tutto quello che diremo vale anche se μ è σ-finita.

[17] La completezza è in realtà una proprietà della coppia $(\mu,\mathscr{F})$ che si dice completa se ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla risulta misurabile. La misura di Lebesgue è completa sulla σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue.

[18] Una famiglia $\mathscr{F}$ di sottoinsiemi di Ω è detta una *σ-algebra* se gode delle seguenti proprietà:

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(ii) $B\in\mathscr{F}\ \Rightarrow\ \Omega\setminus B\in\mathscr{F}$

(iii) $B_h\in\mathscr{F}\ \forall h\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ \bigcup_{h\in\mathbb{N}}B_h\in\mathscr{F}$.

Gli elementi di $\mathscr{F}$ si chiamano *insiemi misurabili*. Si può pensare, per fissare le idee, che μ sia la misura di Lebesgue su Ω e che $\mathscr{F}$ sia la famiglia di tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

[19] Cioè la più piccola σ-algebra contenente i sottoinsiemi aperti (e di conseguenza anche i chiusi).

[20] Cioè la controimmagine di ogni aperto è misurabile (cioè appartiene a $\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}_m$). Nel caso di funzioni a valori reali estesi, come in quello in esame, ciò equivale alla misurabilità degli insiemi di sottolivello.

1. *Se f è normale allora F è s.c.i. rispetto alla convergenza forte di $L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$;*

2. *se f è convesso allora F è s.c.i. rispetto alla convergenza debole di $L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$.*

1 e *2* del teorema precedente si possono riguardare come casi particolari del seguente.

Teorema 11.3 (De Giorgi - Ioffe) *Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to [0,+\infty]$ un integrando normale convesso. Allora il funzionale $F : L^1(\Omega;\mathbb{R}^m) \times L^1(\Omega;\mathbb{R}^k) \to [0,+\infty]$*

$$F(u,v) = \int_\Omega f(x,u(x),v(x))\,d\mu(x)$$

è ben definito e s.c.i. rispetto alla convergenza forte di $L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ nella variabile u e a quella debole di $L^1(\Omega;\mathbb{R}^k)$ nella variabile v.

Ricordando la caratterizzazione della convergenza debole negli spazi di Sobolev, si ottiene immediatamente, come corollario, il seguente teorema di semicontinuità per funzionali integrali su spazi di Sobolev (in tal caso μ è la misura di Lebesgue).

Corollario 11.4 *Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \to [0,+\infty]$ un integrando normale convesso. Allora il funzionale*

$$F(u) = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$$

è seq. s.c.i. rispetto alla convergenza debole di $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione La conclusione è immediata se Ω ha frontiera localmente lipschitziana perchè se $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}$ per il teorema di Rellich $u_h \to u$ in L^1 e quindi la tesi si ottiene scegliendo $v_h = Du_h$ e applicando il teorema di De Giorgi - Ioffe. Se la frontiera di Ω non è regolare, si può approssimare Ω dall'interno mediante aperti con frontiera regolare (cfr. Buttazzo [4], Lemma 4.2.10) ed il risultato già ottenuto può essere applicato ai funzionali F_h definiti come integrali su Ω_h. Per dimostrare la semicontinuità di F è allora sufficiente osservare che, per la positività degli integrandi, F è l'estremo superiore dei funzionali F_h. $\square$

Esempio 11.5 In base al teorema, il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u, \nabla u\rangle dx - \int_\Omega g(x)u\,dx$$

considerato nell'esempio 10.8 risulta sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente in $W_0^{1,2}(\Omega)$ anche se la matrice $A(x)$ non è limitata purché abbia coefficienti misurabili e non negativi. In tal caso però, a differenza di quanto succedeva nell'esempio 10.8, la parte quadratica del funzionale potrebbe non essere una norma.

Riferimenti bibliografici

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[4] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[5] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[6] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[7] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.

[8] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[9] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Springer, Berlin, 1992.

[10] N. Meyers and J. Serrin, *H=w*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).

[11] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.

[12] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.

[13] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.

[14] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.

[15] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.