13 Tredicesima lezione: Condizioni necessarie per la semicontinuità

Se la misura μ è non atomica[26] allora la condizione che l'integrando f sia normale convesso è anche necessaria (oltre che sufficiente) per la semicontinuità del funzionale $F(u,v)$ del teorema 11.3. Vale infatti il seguente teorema di Olech [18].

Teorema 13.1 *Supponiamo che la misura μ oltre che finita e completa sia anche non atomica, e sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ un integrando. Se il funzionale*

$$F(u,v) = \int_\Omega f(x, u(x), v(x))\, d\mu(x)$$

è ben definito su $L^1(\Omega;\mathbb{R}^m) \times L^1(\Omega;\mathbb{R}^k)$ e s.c.i. rispetto alla convergenza forte di $L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ nella variabile u e a quella debole di $L^1(\Omega;\mathbb{R}^k)$ nella variabile v, allora f è un integrando normale convesso.

Osservazione 13.2 L'ipotesi che μ sia non atomica non si può eliminare, infatti presi due elementi distinti x_1 e x_2 di Ω e $\mu = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$, allora $L^1_\mu(\Omega)$ è identificabile con $\mathbb{R}^2$; infatti la funzione $T : L^1_\mu(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ definita da $F[\varphi] = |\varphi(x_1)| + |\varphi(x_2)|$ è un'omeomorfismo lineare. Poiché esistono funzioni s.c.i. su $\mathbb{R}^2$ che non sono convesse, le conclusioni del teorema non valgono in questo caso.

Osserviamo anche che dal teorema precedente non segue in generale che se

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx$$

è debolmente s.c.i. in $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ allora l'integrando f è convesso nella variabile gradiente, perchè non tutte le funzioni $v \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^{nm})$ sono gradienti di qualche funzione di $L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$,[27] a meno che non sia $n = 1$.

Tuttavia si dimostra che nei casi scalari (cioè non solo per $n = 1$ in cui la variabile x è scalare ma anche per $m = 1$ in cui $u(x)$ è scalare) la convessità del funzionale nella variabile gradiente oltre che essere condizione sufficiente per la semicontinuità è anche necessaria. Vale ad esempio il teorema seguente.

Teorema 13.3 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un integrando di Carathéodory. Sia $p \in [1, +\infty[$. Supponiamo che esistano una funzione $a \in L^1(\Omega)$ ed una costante $b > 0$ tali che*

$$|f(x,\xi)| \leq a(x) + b|\xi|^p.$$

[26] Cioè per ogni $E \in \mathscr{F}$ con $\mu(E) > 0$ esiste $B \subset E$, $B \in \mathscr{F}$, tale che $0 < \mu(B) < \mu(E)$.

[27] Ricordiamo che già se $v \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ (caso particolare $m = 1$) una condizione necessaria affinchè esista φ tale che $v = D\varphi$ è che $\operatorname{rot} v = 0$. Ad esempio, nel caso $n = 2$, $m = 1$, la funzione $v(x_1, x_2) = (1, x_1)$ non è gradiente di alcuna funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Infatti, se per assurdo lo fosse, cioè esistesse φ tale che $1 = D_1\varphi$ e $x_1 = D_2\varphi$ allora, per il teorema del differenziale totale φ sarebbe di classe C^2 e si avrebbe $D_2(D_1\varphi) = 0 \neq 1 = D_1(D_2\varphi)$ contro il teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione. Osserviamo che in tale caso $\operatorname{rot} v = D_2 v_1 - D_1 v_2 = D_2 1 - D_1(x_1) = -1 \neq 0$.

Consideriamo il funzionale $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u)\, dx.$$

Se F è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente allora per q.o. $x \in \Omega$ la funzione $\xi \to f(x, \xi)$ è convessa.

Richiami e complementi sulle funzioni convesse

Avendo compreso l'importanza della convessità nello studio dei problemi di minimo, è opportuno richiamare alcune proprietà delle funzioni convesse approfondendone ulteriomente lo studio. Sarà anche un'occasione per rivedere meglio alcune cose appena accennate.

Sia X uno spazio vettoriale. In una lezione precedente è stata data la definizione di funzione convessa $f : X \to [-\infty, +\infty]$. Abbiamo già osservato inoltre che f è convessa se e solo se l'epigrafico è un insieme convesso. In un'altra occasione abbiamo osservato che se f è convessa allora gli insiemi di sottolivello sono convessi (non vale il viceversa come mostra l'esempio della funzione $f(x) = x^3$).

Una conseguenza dell'aver ammesso anche $+\infty$ tra i possibili valori di f è che se C è un sottoinsieme convesso di X e $f : C \to (-\infty, +\infty]$ è una funzione convessa, cioè vale la disuguaglianza di convessità

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

per ogni $x, y \in C$ ed ogni $\lambda \in (0,1)$, allora l'estensione a $+\infty$ di f su X è una funzione convessa. Possiamo quindi limitarci a considerare funzioni convesse definite su tutto X. Inoltre la funzione indicatrice di un sottoinsieme C di X è convessa se e e solo se C è convesso e questo riconduce lo studio degli insiemi convessi a quello delle funzioni convesse.

Invece le funzioni convesse che possono assumere il valore $-\infty$ sono piuttosto patologiche: se f è convessa, e $f(x_0) = -\infty$ allora, usando il fatto che l'epigrafico è convesso ovvero la disuguaglianza di convessità, segue facilmente che su ogni semiretta uscente da x_0, cioè su ogni insieme del tipo $\{x_0 + tv \ : \ t > 0\}$ con $v \in X \setminus \{0\}$, f può comportarsi solo in uno dei modi seguenti

1. vale costantemente $+\infty$
2. vale costantemente $-\infty$;
3. per un opportuno $t_0 > 0$ si ha

$$f(x_0 + tv) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ +\infty & \text{se } t > t_0 \\ c & \text{se } t = t_0 \end{cases}$$

   con $c \in \overline{\mathbb{R}}$ qualunque.

Per evitare queste patologie si introducono le seguenti definizioni.

Definizione 13.4 *Una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *si dice* propria *se non assume mai il valore* $-\infty$ *e esiste* $x_0 \in X$ *tale che* $f(x_0) < +\infty$*.*

Se f è propria, si chiama *dominio (effettivo)* di f l'insieme

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in X \ : \ f(x) < +\infty\}.$$

Spesso converrà inoltre considerare funzioni convesse a valori in $(-\infty, +\infty]$ o anche solo in $\mathbb{R}$.

Esercizio 13.5 *Si provi che l'estremo superiore di una famiglia arbitraria di funzioni convesse è convessa.*

Consideriamo per il momento una funzione convessa di una sola variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Partendo dalla disuguaglianza di convessità

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

con $0 < \lambda < 1$ e $x < y$, posto

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \tag{13.1}$$

si ha che $x < z < y$. A questo punto, ricavando λ dalla (13.1) si ha che $\lambda = (y-z)/(y-x)$ mentre $1-\lambda = (z-x)/(y-x)$. La disuguaglianza di convessità assume allora la forma seguente

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y), \tag{13.2}$$

che si può anche scrivere così

$$f(z) \leq f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) \tag{13.3}$$

o così

$$f(z) \leq f(y) + \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(z-y). \tag{13.4}$$

La disuguaglianza di convessità, nella forma (13.3), dice che nell'intervallo $[x, y]$ il grafico di f sta al di sotto del segmento congiungente $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$. D'altra parte, la (13.3) riscritta nella forma

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

e valendo per qualunque coppia di z e y con $x < z < y$, dice che la funzione rapporto incrementale

$$t \mapsto \frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$

è crescente (non decrescente) in $(x, +\infty)$ qualunque sia x punto fissato in $\mathbb{R}$. Cosa possiamo dire in $(-\infty, x)$? Si può osservare che se fissiamo y anziché x, e partiamo dalla (13.4), allora otteniamo che la funzione rapporto incrementale

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

è crescente (non decrescente) in $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ qualunque sia x punto fissato in $\mathbb{R}$.

Esercizio 13.6 *Dimostrare che f è convessa in X se e solo se per ogni $x, v \in X$ il rapporto incrementale*

$$t \mapsto \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è una funzione crescente.

Abbiamo già enunciato il teorema di Hahn-Banach che qui ricordiamo.

Teorema 13.7 (Hahn-Banach) *Sia X uno spazio vettoriale normato e M un sottospazio di X (cioè un sottoinsieme di X chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare). Sia*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

una funzione lineare e continua. Allora esiste una funzione lineare e continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ che estende f e ne conserva la norma.

Il teorema di Hahn-Banach ammette i seguenti corollari (per la dimostrazione vedere ad esempio Brezis [3]).

Corollario 13.8 (Forma geometrica di Hahn-Banach) *Sia X normato. Siano $A, B \subset X$ convessi, non vuoti, disgiunti, con A aperto. Allora A e B si possono separare con un iperpiano chiuso, cioè esistono $T \in X^*$ ed $\alpha \in R$ tali che $A \subseteq \{x \in X \ : \ T(x) \leq \alpha\}$ e $B \subseteq \{x \in X \ : \ T(x) \geq \alpha\}$.*

Corollario 13.9 (Forma geometrica stretta) *Sia X normato. Siano $A, B \subset X$ convessi, non vuoti, disgiunti, con A chiuso e B compatto. Allora A e B si possono separare strettamente con un iperpiano chiuso, cioè esistono $T \in X^*$, $\alpha \in R$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $A \subseteq \{x \in X \ : \ T(x) \leq \alpha - \varepsilon\}$ e $B \subseteq \{x \in X \ : \ T(x) \geq \alpha + \varepsilon\}$.*

È particolarmente interessante per i nostri scopi la seguente conseguenza del primo corollario.

Corollario 13.10 *Sia X normato e $E \subset X$ convesso con interno non vuoto. Allora per ogni punto di frontiera di E esiste un iperpiano chiuso, detto* iperpiano di appoggio*, che separa il punto e l'insieme E*

Dimostrazione Sia x_0 il punto di frontiera. Basta applicare il primo corollario alla coppia di sottoinsiemi convessi e non vuoti $A = \overset{\circ}{E}$ e $B = \{x_0\}$. $\square$

Continuità delle funzioni convesse

Teorema 13.11 *Sia f convessa propria su X. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

1. *f è superiormente limitata in un intorno di un punto x;*
2. *f è continua in un punto x;*
3. $(\mathrm{epi}(f))^\circ \neq \varnothing$*;*
4. $(\mathrm{dom}(f))^\circ \neq \varnothing$ *e f è continua in* $(\mathrm{dom}(f))^\circ$*.*

Dimostrazione Ioffe e Tihomirov [15], 3.2.3 Theorem 1.

Teorema 13.12 (Disuguaglianza di Jensen) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega| < +\infty$, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ integrabile e $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ convessa. Allora vale la disuguaglianza*

$$f\Big(\fint_\Omega \xi(x)\,dx\Big) \leq \fint_\Omega f\big(\xi(x)\big)\,dx.$$

Dimostrazione Poiché f è reale e convessa allora $\mathrm{epi}(f)$ è convesso e ha parte interna non vuota, preso un punto del grafico $(\eta, f(\eta))$ e applicando il corollario 13.10 si ha che esiste un iperpiano di appoggio che separa punto ed epigrafico. Poichè il fascio di iperpiani passante per il punto ha equazione

$$y = f(\eta) + a \cdot (\xi - \eta), \quad a \in \mathbb{R}^m$$

allora quanto affermato si può tradurre come segue

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^m \ \exists\, a \in \mathbb{R}^m \text{ tale che } f(\xi) \geq f(\eta) + a \cdot (\xi - \eta) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Scegliendo $\xi = \xi(x)$ e $\eta = \langle \xi \rangle = \fint_\Omega \xi(x)\,dx$ si ha

$$f(\xi(x)) \geq f(\langle \xi \rangle) + a \cdot (\xi(x) - \langle \xi \rangle) \ \forall\, x \in \Omega,$$

e la tesi segue integrando su Ω. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[4] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[5] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[6] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[7] G. Dal Maso, *Problemi di semicontinuità e rilassamento nel calcolo delle variazioni*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana **39** (1995), 145–196.

[8] E. De Giorgi, *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Lezioni tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, a.a. **1**968-69 Roma, 1969.

[9] E. De Giorgi, G. Buttazzo, and G. Dal Maso, *On the lower semicontinuity of certain integral functionals*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **74** (1983), no. 5, 274–282.

[10] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.

[11] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1976.

[12] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[13] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Springer, Berlin, 1992.

[14] A.D. Ioffe, *On lower semicontinuity of integral functionals I, II*, SIAM J. Control Optim. **15** (1977), 521–538, 991–1000.

[15] A.D. Ioffe and V.M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Studies in Mathematics and its Applications, 6, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.

[16] N. Meyers and J. Serrin, $H{=}W$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).

[17] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.

[18] C. Olech, *A characterization of* L^1*-weak lower semicontinuity of integral functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), 135–142.

[19] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.

[20] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.

[21] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.

[22] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.