6 Sesta lezione: Compattezza sequenziale nelle topologie deboli. Dualità e convergenze deboli negli spazi L^p.

Metrizzabilità delle topologie deboli

Anche se le topologie deboli non sono mai metrizzabili, quando gli spazi in considerazione godono di opportune proprietà di separabilità i sottoinsiemi limitati si possono dotare di una metrica che induce la topologia debole o debole*. Vale in proposito il seguente teorema per la cui dimostrazione si può vedere Brezis [1], Théoréme III.25 e III.25′ (vedi anche Dunford e Schwartz [5], teoremi V.5.1, V.6.3 e successiva osservazione e Dal Maso [4] Proposition 8.7).

Teorema 6.1 *Sia X uno spazio di Banach. Allora*

(i) le palle di X sono debolmente metrizzabili se e solo se X^* è separabile;

(ii) le palle di X^* sono debolmente metrizzabili se e solo se X è separabile.*

Compattezza per successioni

Come conseguenza dei teoremi 5.8, 5.9 e 6.1 si ha che

1. se X^* è separabile e X è riflessivo allora le palle chiuse di X sono sequenzialmente debolmente compatte;

2. se X è separabile allora le palle chiuse di X^* sono sequenzialmente debolmente* compatte.

La 1. è generalizzabile a tutti i sottoinsiemi convessi, limitati (cioè contenuti in una palla) e chiusi di X utilizzando il seguente teorema.

Teorema 6.2 *Sia $C \subseteq X$ convesso. C è debolmente chiuso se e solo se è fortemente chiuso.*

Poichè, per definizione di topologia debole, ogni insieme debolmente chiuso è anche fortemente chiuso, la parte non banale del teorema è la $\Leftarrow$. La dimostrazione usa il Teorema di Hahn-Banach.

Una proprietà analoga alla 2. vale per tutti i sottoinsiemi convessi, limitati (cioè contenuti in una palla) e *debolmente** chiusi di X (in questo caso però non c'è l'equivalenza tra chiusura forte e chiusura debole*: vedi ad esempio Brezis [1], Capitolo III, Remarque 11).[8]

Inoltre, per funzioni convesse su uno spazio di Banach valgono i risultati seguenti.

[8] È appena il caso di osservare che le palle chiuse sono debolmente* chiuse perchè sono debolmente* compatte e metrizzabili, e i compatti, negli spazi metrici, sono chiusi.

Teorema 6.3 *Sia X uno spazio di Banach, e sia $F : X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. Allora, indicata con s la topologia forte, w la topologia debole e w^* quella debole*, si ha:*

1. *F è s-s.c.i. $\iff$ F è w-s.c.i.;*

2. *se X^* è separabile,*
   F è w-s.c.i. $\iff$ F è seq. w-s.c.i.;

3. *se $X = V^*$ con V spazio di Banach separabile*
   F è w^*-s.c.i. $\iff$ F è seq. w^*-s.c.i..

Applicazione a problemi di minimo

Teorema 6.4 *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Se*

1. *F è debolmente semicontinua inferiormente;*

2. $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$*;*

Allora esiste il minimo di F su X.

Dimostrazione Se F è identicamente $+\infty$ non c'è nulla da provare. Supponiamo dunque che esista $x_0 \in X$ tale che $F(x_0) < +\infty$. Per la *2.* si ha che esiste $R > 0$ tale che $F(x) > F(x_0)$ per ogni $\|x\| > R$ e pertanto

$$\inf_X F = \inf_{B_R} F$$

dove $B_R = \{x \in X \ : \ \|x\| \le R\}$. Poichè B_R è compatto e chiuso e F è semicontinua la tesi segue dal teorema di Weierstrass. □

Osservazione 6.5 L'ipotesi *2.* è in particolare soddisfatta se esistono tre costanti $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ e $\gamma > 0$ tali che $F(x) \ge \alpha\|x\|^\gamma - \beta$.

Analogamente si potrebbe dimostrare il seguente teorema

Teorema 6.6 *Sia X uno spazio di Banach e sia $F : X^* \to \mathbb{R}$ una funzione. Se*

1. *F è debolmente* semicontinua inferiormente;*

2. $\lim\limits_{\|\varphi\|_{X^*} \to +\infty} F(\varphi) = +\infty$*;*

Allora esiste il minimo di F su X^*.

Duali degli spazi L^p

Se $p = 2$ vale il teorema di Riesz per gli spazi di Hilbert che per $H = L^2$ assume la forma seguente.

Teorema 6.7 *$T \in (L^2(\Omega))^*$ se e solo se esiste (ed è unica) $u \in L^2(\Omega)$ tale che*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx \text{ per ogni } \varphi \in L^2(\Omega).$$

Inoltre si osserva che $\|T\| = \|u\|_2$. Ne consegue che la corrispondenza $T \mapsto u$ definisce un'isometria suriettiva tra $(L^2)^*$ e L^2. Ciò consente di identificare $(L^2)^*$ con L^2.

Negli spazi L^p[9] vale il seguente teorema di rappresentazione dimostrato su Brezis.

Teorema 6.8 *Sia $1 \le p < +\infty$. Sia $T \in (L^p(\Omega))^*$. Allora esiste un'unica $u \in L^{p'}(\Omega)$ con p' esponente coniugato[10] di p, tale che*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx \text{ per ogni } \varphi \in L^p(\Omega).$$

Inoltre si ha che $\|T\| = \|u\|_{p'}$.

Ne consegue che la corrispondenza $T \mapsto u$ definisce un'isometria suriettiva tra $(L^p)^*$ e $L^{p'}$ che consente di identificare $(L^p)^*$ con $L^{p'}$.

Se si passa ai biduali si scopre che L^p è riflessivo per ogni $1 < p < +\infty$. Per quanto riguarda la riflessività e la separabilità degli spazi L^p e la caratterizzazione del duale abbiamo la seguente tabella riassuntiva (vedi Brezis [1] IV.3)

L^p $(1 < p < \infty)$	riflessivo	separabile	duale: $L^{p'}$
L^1	non riflessivo	separabile	duale: L^∞
L^∞	non riflessivo	non separabile	$(L^\infty)^* \supset L^1$

Lo spazio L^∞ ha un ruolo speciale. Per il teorema precedente esso è duale di L^1 che è separabile. Il duale di L^∞ è di difficile descrizione. Però le palle chiuse sono debolmente* compatte (teorema di Alaoglu) e metrizzabili (quindi compatte per successioni).

[9] $L^p(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$, è definito come lo spazio delle funzioni u tali che $\int_\Omega |u|^p dx < +\infty$ modulo la relazione di equivalenza che identifica funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla secondo Lebesgue. Se $p = +\infty$, $L^\infty(\Omega)$ è definito come lo spazio delle funzioni *u essenzialmente limitate*, cioè limitate a meno di un insieme di misura nulla, modulo la solita relazione di equivalenza. Se $1 \le p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ si può dotare della norma $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p}$ mentre L^∞ si può dotare della norma $\|u\|_\infty = \inf\{C \ : \ |u(x)| \le C \text{ q. o. in } \Omega\}$, dove "q. o." sta per "quasi ovunque" che precisamente significa "ad eccezione di un insieme di misura nulla secondo Lebesgue". Rispetto a queste norme gli spazi $L^p(\Omega)$ sono completi per ogni $p \in [1, +\infty]$ (cfr. Brezis [1], Théoréme IV.8, oppure Rudin [8], Teorema 3.11). $L^p(\Omega)$ è quindi uno spazio di Banach. Nel caso $p = 2$ è anche di Hilbert.

[10] Dato $p \in (1, +\infty)$ si chiama esponente coniugato o duale di p il numero $p' \in (1, +\infty)$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si definisce, inoltre, $1' := +\infty$.

Per le *1.* delle proposizioni 5.3 e 5.6, le convergenze deboli negli spazi $L^p(\Omega)$ e debole* in $L^\infty(\Omega)$ hanno le seguenti caratterizzazioni

$$f_n \rightharpoonup f \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega f_n(x)g(x)\,dx \to \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \ \forall\, g \in L^{p'}(\Omega), \quad 1 \le p < \infty$$
$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega f_n(x)g(x)\,dx \to \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \ \forall\, g \in L^{p'}(\Omega), \quad p = \infty$$

Per i teoremi di Kakutani e di Alaoglu, si ha che

- $\|f_n\|_p \le C \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ (1 < p < \infty) \quad \Rightarrow \quad \exists\, f_{n_k} \rightharpoonup f$ in L^p
- $\|f_n\|_\infty \le C \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \exists\, f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in L^∞

Per contro,

- $\|f_n\|_1 \le C \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \not\Rightarrow \quad \exists\, f_{n_k} \rightharpoonup f$ in L^1;

vedremo più avanti un esempio in tal senso.

Due utili criteri di compattezza debole in $L^1(\Omega)$ sono riassunti nel seguente teorema.

Teorema 6.9 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

- *$\mathcal{H}$ è relativamente*[11] *debolmente compatto in L^1;*
- (criterio di Dunford-Pettis) *$\mathcal{H}$ è uniformemente integrabile, cioè $\mathcal{H}$ è limitato in L^1 e*
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \ : \ |B| < \delta \Rightarrow \int_B |u|\,dx < \varepsilon \ \forall\, u \in \mathcal{H};$$
- (criterio di De la Valle-Poussin) *esiste una funzione $\theta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ (θ può essere presa convessa e crescente) tale che*
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\theta(t)}{t} = +\infty \quad \text{e} \quad \sup\{\int_\Omega \theta(|u|)\,dx \ : \ u \in \mathcal{H}\} < +\infty.$$

Abbiamo visto che la convergenza debole non implica la forte. Questo però accade se oltre alla convergenza debole vi è anche convergenza delle norme, come precisato dal seguente teorema.

Teorema 6.10 *Sia $1 < p < +\infty$ e $f_n \rightharpoonup f$ in L^p. Se inoltre $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, allora $f_n \to f$ in L^p.*

[11] Cioè la chiusura di $\mathcal{H}$ è compatta.

Dimostrazione La dimostrazione è molto semplice nel caso $p = 2$ in cui si ha

$$\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 - 2\langle f_n, f\rangle + \|f\|^2 = \|f_n\|^2 - 2\langle f_n - f, f\rangle - \|f\|^2$$

e basta quindi passare al limite per $n \to \infty$ per ottenere la tesi. Per il caso del generico p si rimanda a Riesz e Nagy [7], § 37. □

È appena il caso di osservare che non basta che $\|f_n\|$ sia limitata per concludere che esiste una sottosuccessione fortemente convergente (infatti ogni successione debolmente convergente è limitata).

Esercizio 6.11 *Mostrare con un esempio che il precedente teorema non vale se* $p = 1$ *o* $p = +\infty$. *(Suggerimento: si considerino ad esempio le successioni di funzioni* $f_n(x) = \operatorname{sen}^2(nx)$ *per* $x \in [0, 2\pi]$ *e* $f_n(x) = x^n 1_{[0,1](x)} + 1_{]1,2]}(x)$*.)*

Riferimenti bibliografici

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[2] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[3] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[4] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[5] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.

[6] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[7] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.

[8] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.