1 Prima Lezione. Problemi di minimo

Buona parte del materiale di questa lezione è tratto da Elio Cabib: *Calcolo delle Variazioni per Principianti,* http://users.uniud.it/cabib/dispense/cdvpp.pdf

Forma generale di un problema di minimo

Dato un insieme X ed una funzione $F : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, trovare $x \in X$ tale che

$$F(x) = \min_{y \in X} F(y).$$

Problemi del Calcolo delle Variazioni

Nel Calcolo delle Variazioni X è uno spazio di funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e F è un funzionale integrale

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx \tag{1.1}$$

dove $Du = (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})$ denota la matrice jacobiana di u e l'*integrando* $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ deve soddisfare condizioni sufficienti a garantire che l'integrale abbia senso per ogni $u \in X$. Nella (1.1) potrebbero comparire anche derivate di ordine superiore. Sulla frontiera di Ω possono essere assegnate

- *condizioni di Dirichlet* in cui si assegna il valore di u;
- *condizioni di Neumann* in cui si assegna il valore della derivata normale di u (cioè $Du(x) \cdot \nu(x)$ dove $\nu(x)$ è un versore normale a $\partial\Omega$ che perciò deve essere abbastanza regolare);
- *condizioni miste*: Dirichlet su una parte del bordo, Neumann sul complementare.

Se F non è a priori un integrale, il CdV si preoccupa di determinare delle condizioni affinchè esso ammetta una rappresentazione integrale (Buttazzo [1]).

Il CdV in senso stretto consiste in una tecnica sviluppata da Eulero per la risoluzione di problemi di minimo. Altre tecniche sono state poi sviluppate in seguito, ma il nome di CdV ha continuato a denotare quella parte della matematica che si occupa della risoluzione di problemi di minimo.

Presentazione informale di alcuni problemi di minimo

Problemi isoperimetrici

Versione generale:

- \- tra tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di assegnato perimetro trovare quello di misura massima;

- \- tra tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di assegnato volume trovare quello di perimetro minimo.

Storicamente la nascita dei problemi isoperimetrici si fa risalire alla fondazione di Cartagine.[1]

Un semplice problema isoperimetrico è il seguente: *Tra tutti i rettangoli di fissato perimetro $\mathcal{P}$, trovare quello che racchiude la massima area.*

Indicate con a e b le misure dei lati del rettangolo e con A l'area si ha

$$\mathcal{P} = 2(a+b) \qquad A = ab.$$

Si ha dunque, utilizzando la disuguaglianza (di Young) $a^2 + b^2 \geq 2ab$,

$$\mathcal{P}^2 = 4(a+b)^2 = 4(a^2 + b^2 + 2ab) \geq 4(2ab + 2ab) = 16ab = 16A$$

cioè, riassumendo,

$$A \leq \frac{\mathcal{P}^2}{16};$$

per come è stata ottenuta, l'uguaglianza vale se e solo se $a = b$, cioè nel caso del quadrato. Tra tutti i rettangoli di fissato perimetro il quadrato ha dunque area massima.

Si potrebbe anche considerare il problema duale ("isodiametrico): – *tra tutti i rettangoli di fissata area trovare quello di perimetro minimo* –. La soluzione è di nuovo il quadrato.

In generale, per affrontare un problema isoperimetrico si cerca di dare una stima universale della misura (area, volume,...) in termini del perimetro

$$m(\Omega) \leq C(n)\mathcal{P}(\Omega)^{\alpha(n)} \qquad \textit{(disuguaglianza isoperimetrica)}$$

con $C(n)$ constante indipendente da Ω e poi si cerca di trovare l'insieme Ω ottimale, cioè quello che realizza l'uguaglianza (cosa possibile solo se si è indovinata la costante ottimale).

Ma consideriamo ora il *problema di Didone: Quale curva piana e sufficientemente regolare di lunghezza assegnata ℓ con primo e secondo estremo in punti distinti dell'asse x rende massima l'area della regione che essa delimita insieme alla retta $y = 0$?*

[1] La leggenda narra di Elissa, principessa di origine fenicia, figlia del re di Tiro. Alla morte del padre, Pigmalione il fratello di Elissa, sale al trono e fa uccidere a tradimento lo zio, marito di Elissa, per prendere tutte le sue ricchezze. Dopo la morte del marito, insieme alla sorella e a pochi fedeli, Elissa fugge per mare finchè approda in Libia. E' per questo che Elissa viene ricordata con il nome di Didone, cioè l'errante. La Libia era la terra di Jarba, re dei Getuli. Jarba non vuole dare ai fuggiaschi nè asilo nè terre ove stabilirsi, a meno che Didone non acconsenta a sposarlo. La donna rifiuta e allora il re le concede tanta terra quanta ne può contenere una pelle di bue. Didone accetta la sfida e, con uno stratagemma: fa tagliare la pelle in striscie sottili che, legate insieme, formano un nastro per recintare, anzichè coprire, la terra richiesta. Piace ai matematici pensare che la lunga striscia di pelle abbia delineato una semicirconferenza chiusa dalla riva del mare. Didone avrebbe così risolto un problema isoperimetrico: determinare la figura piana di area massima, avendo a disposizione un perimetro fissato.

Non è restrittivo assumere che $\ell = \pi$ e $y \geq 0$. Indichiamo con Ω la regione delimitata dalla curva di equazioni parametriche

$$(x(s), y(s)), \quad s \in [0, \ell], \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

e dall'asse x. Usando le formule di Gauss-Green, la disuguaglianza di Young e la disuguaglianza di Poincaré

$$\int_0^\pi y^2 ds \leq \int_0^\pi y'^2 ds,$$

che verrà chiarita tra poco, si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_\Omega \frac{\partial y}{\partial y}\, dxdy = -\int_{\partial\Omega^+} y\, dx \\ &= -\int_0^\pi yx'\, ds \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi (x'^2 + y^2)\, ds \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi (x'^2 + y'^2)\, ds = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

dal momento che $x'^2 + y'^2 = 1$ perchè la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Ogni semicirconferenza della forma

$$\begin{cases} x(s) = c + \cos s \\ y(s) = \operatorname{sen} s, \end{cases} \qquad s \in [0, \pi]$$

realizza l'uguaglianza.

Dimostriamo la disuguaglianza di Poincarè nel caso in cui la funzione y sia regolare a tratti, cioè continua derivabile su $I = [0, \pi]$ con derivata limitata e continua su I ad eccezione di un numeri finito di punti in cui esistono finiti i limiti destro e sinistro della funzione e della derivata. Supponiamo anche che $y(0) = y(\pi) = 0$. Indichiamo ancora con $y(s)$ il suo prolungamento dispari e 2π-periodico a tutto $\mathbb{R}$. In tali ipotesi y è somma uniforme (in quanto continua) della propria serie di Fourier (teorema di Dirichlet)

$$y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{y}(n) \operatorname{sen}(ns), \qquad \hat{y}(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(s) \operatorname{sen}(ns)\, ds.$$

Applicando l'identità di Parseval alla y si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{y}(n)|^2. \tag{1.2}$$

Alla y', che è integrabile e periodica di periodo 2π, si può invece applicare la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{y'}(n)|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y'^2\, ds, \tag{1.3}$$

nella quale, essendo y' pari,

$$\hat{y'}(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y'(s) \cos(ns)\, ds = n\hat{y}(n), \tag{1.4}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene integrando per parti. Riunendo (1.2), (1.3) e (1.4) si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} y^2\, ds = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{y}(n)|^2 \le \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\hat{y}(n)|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} {y'}^2\, ds$$

cioè la tesi.

Esercizio 1.1 Dimostrare che nel caso di un intervallo I di lunghezza ℓ si ha

$$\int_I y^2\, ds \le (\frac{\ell}{\pi})^2 \int_I {y'}^2\, ds$$

e che la costante è ottimale ($\text{sen}(\pi s/\ell)$ realizza l'uguaglianza).

Il problema delle geodetiche

Dati due punti A e B su una superficie regolare Γ, trovare la curva di minima lunghezza, sulla varietà, che abbia come estremi A e B.

Se come spazio X si considera quello delle curve $\boldsymbol{x}(t)$ regolari a tratti, allora si tratta di minimizzare il funzionale che esprime la lunghezza

$$L(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 |\boldsymbol{x}'(t)|\, dt.$$

In $\mathbb{R}^n$ i punti di minimo saranno le rette, su una sfera archi di cerchio massimo.

Il problema della brachistocròna

Si tratta di *determinare la curva liscia γ a cui deve essere vincolato un punto materiale pesante affinchè il tempo impiegato durante la caduta, tra due assegnate posizioni A e B, risulti minimo.*

Questo problema, posto da Joan Bernoulli nel 1696, in una delle sfide matematiche dell'epoca, segna convenzionalmente l'inizio del Calcolo delle Variazioni. Sembra che lo stesso Joan Bernoulli fosse già in possesso della soluzione, ma comunque il problema appassionò e venne risolto anche da James Bernoulli, Newton e l'Hôpital.

Supponendo che P abbia massa m, e che in un sistema di riferimento con asse x orizzontale e asse y verticale discendente, parta da $A = (0,0)$ con velocità nulla e debba arrivare in $B = (l, a)$. Per la conservazione dell'energia meccanica si ha, in ogni istante,

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y$$

essendo $y = y(x)$ la curva su cui P deve muoversi (parametrizzata con x). Il tempo impiegato per andare da A a B è allora

$$T = \int_\gamma \frac{ds}{v} = \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+{y'}^2}{2gy}}\, dx$$

e il problema diventa quindi

$$\min F(y) = \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+{y'}^2}{y}}\, dx$$

con le condizioni di Dirichlet $y(0) = 0$ e $y(\ell) = a$.

Il problema di Fermat

Il funzionale del problema della brachistocròna è un caso particolare di

$$F(y) = \int_0^\ell h(y)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

che interviene anche nel modello generale classico della propagazione della luce attraverso un mezzo trasparente. Ad ogni punto P del mezzo corrisponde il modulo $v(P) \geq 0$ della velocità con cui il raggio di luce passa attraverso P. Secondo il Principio di Fermat la luce viaggia, tra due punti dello spazio, lungo una traiettoria che minimizza il tempo

$$\min_\gamma \int_\gamma \frac{ds}{v}.$$

Se la curva γ ammette la rappresentazione parametrica

$$(x(t), y(t)), \quad t \in [0, 1]$$

e si suppone di classe C^1 a tratti allora il funzionale da minimizzare si scrive nella forma

$$F(x, y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{v(x, y)}\, dt.$$

Nel caso di un mezzo omogeneo in cui v è costante si ricade nel caso delle geodetiche; il minimo tempo e la minima lunghezza sono la stessa cosa e la luce viaggia in linea retta se lo spazio è quello ordinario euclideo.

Se le proprietà materiali dipendono solo dalla quota y allora si può dimostrare che le curve sono grafici $y = y(x)$ e il funzionale diventa

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y)}\, dt.$$

Il caso in cui v non è costante, ma per esempio decrescente con la quota y, accade ad esempio quando in un caldo pomeriggio estivo gli strati dell'aria più vicino all'asfalto sono più rarefatti a causa della maggiore temperatura; il raggio di luce che parte dal sole e raggiunge i nostri occhi li preferisce e quindi si incurva dandoci l'impressione che si tratti di un fenomeno di riflessione. Per questo ci sembra di vedere, in lontananza sulla strada, una zona bagnata che fa da specchio.

Il riferimento alle geodetiche del caso omogeneo suggerisce di ribaltare il punto di vista e di considerare le soluzioni dei problemi di minimo tempo come le geodetiche di uno spazio non euclideo, dove le nuove rette si identificano con le traiettorie della luce.

Problemi di conduzione termica o elettrica

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Il problema di minimo

$$\min F(u) = \int_\Omega \frac{|Du|^2}{2}\, dx - \int_\Omega g \cdot u\, dx \tag{1.5}$$

con $u : \Omega \to \mathbb{R}$ soddisfacente la condizione di Dirichlet $u_{|\partial\Omega} = u_0$ descrive la conduzione stazionaria del calore in un conduttore termico Ω nel quale è presente una fonte distribuita di calore $g : \Omega \to \mathbb{R}$ posto in un ambiente a temperatura costante $u = u_0$. Il funzionale $F(u)$ è strettamente convesso a questo fa si che vi sia un unico punto di minimo che rappresenta la distribuzione di temperatura nel conduttore.

Lo stesso problema descrive la distribuzione del potenziale elettrostatico all'interno di un conduttore elettrico immerso in un materiale dielettrico isolante mantenuto ad un potenziale u_0. La funzione g rappresenta un'assegnata distribuzione di carica elettrica.

Elasticità (non lineare)

Supponiamo che un solido elastico occupi un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ che viene assunta come configurazione di riferimento. Supponiamo poi che sia sottoposto a forze di volume di densità $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ assegnata, che tendono a deformarlo mentre la frontiera sia soggetta ad una deformazione assegnata $y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (per esempio l'identità). Le configurazioni di equilibrio del solido elastico sono i punti di minimo del funzionale

$$F(u) = \int_\Omega W(x, Dy(x))\, dx - \int_\Omega g(x) \cdot y\, dx$$

dove la funzione W, generalmente non convessa nel gradiente di y, dipende dalla microstruttura del materiale, cioè dalla eventuale struttura cristallina e in ultima analisi dall'interazione molecolare.

Elasticità lineare

Se il solido che occupa il sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ soddisfa a certe caratteristiche, cioè se è un "solido elastico lineare, omogeneo e isotropo", ed è soggetto a forze di volume di densità $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ assegnata, allora le configurazioni di equilibrio sono i punti di minimo del funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(\mathrm{e}(u))\, dx - \int_\Omega g \cdot u\, dx$$

dove $u : \Omega \to R^3$ rappresenta lo spostamento dalla configurazione di riferimento, $\mathrm{e}(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T)$ è la parte simmetrica del gradiente, e l'integrando f dipende dal materiale. Molto studiati sono i materiali di De Saint Venant - Kirkhhoff in cui

$$f(e) = \mu|\,\mathrm{e}\,|^2 + \frac{\lambda}{2}|\,\mathrm{tr}(e)|^2.$$

dove λ e μ sono due costanti non negative, dette costanti di Lamè, che dipendono dal materiale.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Buttazzo, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

2 Seconda lezione. Generalizzazioni del Teorema di Weierstrass

Il principale riferimento bibliografico per questa lezione è il testo di Checcucci, Tognoli, Vesentini [2].

Introduzione

Supponiamo che $X = \mathbb{R}^n$. È noto (teorema di Weierstrass) che se K è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora f ha massimo e minimo.

In effetti se si guarda alla dimostrazione del teorema di Weierstrass con le successioni ci si accorge che, se ci si accontenta di provare l'esistenza del minimo, cosa a cui siamo maggiormente interessati, la condizione di continuità

$$x_n \to x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

può essere sostituita con la più debole

$$x_n \to x \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Per l'esistenza del minimo non è dunque necessario che la funzione sia continua, ma basta che sia *semicontinua inferiormente*.

A pensarci bene, non serve nemmeno che il dominio di f sia compatto, ma basta che siano relativamente compatti gli insiemi di sottolivello (e il dominio di f essere anche tutto $\mathbb{R}^n$), cioè che f sia *coerciva*. Questo succede, ad esempio, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.

Poichè siamo interessati a casi in cui X è uno spazio di funzioni e quindi uno spazio topologico più generale di $\mathbb{R}^n$ (molto spesso si tratterà di uno spazio metrico) introdurremo le nozioni di semicontinuità e di coercività in ambito più generale.

Preliminari topologici

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Dato un punto $x \in X$ denoteremo con $\mathscr{U}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di X.

Definizione 2.1 (Primo assioma di numerabilità (N_1)) *Si dice che X soddisfa al* primo assioma di numerabilità *se ogni punto di x ammette un* sistema fondamentale di intorni numerabile *(cioè una famiglia numerabile di intorni di x tale che ogni intorno di x contiene un intorno della famiglia).*

Definizione 2.2 (Secondo assioma di numerabilità (N_2)) *Si dice che X soddisfa al* secondo assioma di numerabilità*, o che è a* base numerabile*, se esiste una base di aperti numerabile per la topologia di X (cioè esiste una famiglia numerabile di aperti tale che ogni altro aperto è unione di aperti della famiglia).*

Si potrebbe dimostrare che $N_2 \Rightarrow N_1$.

Osservazione 2.3 Gli spazi metrici soddisfano il primo assioma di numerabilità. In genere uno spazio metrico non soddisfa il secondo assioma di numerabilità (esempio $\mathbb{R}$ con la topologia discreta) a meno che non si supponga che sia *separabile* cioè che contenga un sottoinsieme numerabile denso. È questo il caso degli spazi metrici compatti che vedremo nella prossima sezione. In ogni caso, gli spazi metrici separabili soddisfano entrambi gli assiomi di numerabilità.

Compattezza

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ (anche eventualmente $Y = X$). Una famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X si dice un *ricoprimento* di Y se

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq Y.$$

Se ciascuno degli A_i è aperto si parla di *ricoprimento aperto.*

Definizione 2.4 *Y si dice* compatto *se ogni ricoprimento aperto $\{A_i\}_{i\in I}$ di Y ammette un sottoricoprimento finito, cioè esiste un sottoinsieme finito di indici $J \subset I$ tale che $\cup_{i\in J} A_i \supseteq Y$.*

Osservazione 2.5 Se Y è compatto in X rispetto ad una topologia τ allora resta compatto anche in ogni topologia più debole (cioè meno fine).

Proposizione 2.6 *I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea sono tutti e soli quelli chiusi e limitati.*

È subito visto che questa proprietà non è soddisfatta in tutti gli spazi topologici. Per esempio, in uno spazio X costituito da almeno due punti con la topologia banale un punto è un sottoinsieme compatto ma non chiuso (il complementare non è aperto). Negli spazi metrici le cose vanno un po' meglio, nel senso che vale una delle due implicazioni del teorema precedente. Precisamente:

Proposizione 2.7 *Sia X uno spazio metrico e $K \subseteq X$. K compatto $\Rightarrow$ K chiuso e limitato.*

È importante però rilevare che il viceversa in generale non è vero nemmeno negli spazi metrici dove i compatti sono caratterizzati dal fatto di essere *completi* e *totalmente limitati* che sono condizioni più forti della chiusura e della limitatezza. Tuttavia come vedremo gli spazi metrici sono meglio degli altri almeno per il fatto che la compattezza è caratterizzabile sequenzialmente nello stesso modo di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.8 *Y si dice* sequenzialmente compatto *se da ogni successione di elementi di Y è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in Y.*

Tra compattezza e compattezza sequenziale non vale, in generale, alcuna delle due implicazioni. Tuttavia le due nozioni coincidono negli spazi metrici.

Teorema 2.9 *Sia X uno spazio metrico e $Y \subseteq X$. Y è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE (schema) $\Rightarrow$ Sia (y_n) una successione di elementi di Y. Se i suoi valori costituiscono un insieme finito allora esiste una sottosuccessione costante convergente a uno dei valori della successione che è ovviamente un punto di Y. Se l'insieme dei valori della successione è infinito, usando il fatto che gli spazi metrici soddisfano il primo assioma di numerabilità si dimostra, come nel Teorema di Bolzano-Weierstrass, che la successione ha almeno un punto di accumulazione. La conclusione segue dal fatto che K è chiuso.

$\Leftarrow$ È più complicata e gioca un ruolo essenziale il fatto che uno spazio metrico compatto è separabile, e quindi soddisfa anche il secondo assioma di numerabilità. $\square$

Osservazione 2.10 Se K è un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico X allora K è uno spazio topologico compatto per la topologia indotta da X.

Ne consegue che ogni proprietà stabilita per gli spazi topologici compatti si può applicare anche a tutti i sottoinsiemi compatti riguardandoli come spazi topologici compatti con la topologia di sottospazio.

Proposizione 2.11 *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto.*

DIMOSTRAZIONE Sia X compatto e C un sottoinsieme chiuso. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di aperti tali che

$$C \subseteq \cup_{i\in I} A_i.$$

Il complementare C' è aperto e si ha

$$X = C \cup C' \subseteq \big(\cup_{i\in I} A_i \big) \cup C'.$$

Poichè X è compatto esiste $J \subseteq I$ finito tale che

$$X \subseteq \big(\cup_{j\in J} A_j \big) \cup C'.$$

Ne segue che

$$C \subseteq \cup_{j\in J} A_j$$

e pertanto C è compatto. $\square$

La proprietà dell'intersezione finita

Definizione 2.12 *Si dice che una famiglia $\{B_i\}_{i\in I}$ ha la* proprietà dell'intersezione finita *se per ogni sottoinsieme finito J di I l'intersezione $\cap_{j\in J} B_j$ è non vuota.*

Con la proprietà dell'intersezione finita si può dare la seguente caratterizzazione degli insiemi compatti.

Teorema 2.13 *Sia X uno spazio topologico. X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi di X che abbia la proprietà dell'intersezione finita ha un'intersezione non vuota.*

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Sia $\{C_i\}$ una famiglia di chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita e supponiamo per assurdo che

$$\cap_{i\in I} C_i = \varnothing.$$

Allora

$$X = \big(\cap_{i\in I} C_i\big)' = \cup_{i\in I} C_i'.$$

Poichè X è compatto allora esiste J finito tale che

$$X = \cup_{j\in J} C_J',$$

vale a dire

$$\cap_{j\in J} C_J = \varnothing$$

contro la proprietà dell'intersezione finita.

($\Leftarrow$) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora, posto $C_i = A_i'$ per ogni $i \in I$, si ha che $\{C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi tale che $\cap_{i\in I} C_i = (\cup_{i\in I} A_i)' = \varnothing$. Per ipotesi dunque la famiglia $\{C_i\}_{i\in I}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Ma allora esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\cap_{j\in J} C_j = \varnothing$ e quindi $\cup_{j\in J} A_j = (\cap_{j\in J} C_j)' = X$. Allora $\{A_j\}_{j\in J}$ è un sottoricoprimento finito e X risulta compatto per l'arbitrarietà del ricoprimento $\{A_i\}_{i\in I}$. $\square$

Semicontinuità

Definiamo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. In $\overline{\mathbb{R}}$ considereremo sempre la topologia in cui gli intorni sono definiti come in $\mathbb{R}$ ed in più

- un intorno di $-\infty$ è qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo del tipo $[-\infty, a[$,
- un intorno di $+\infty$ è qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo del tipo $]b, +\infty]$.

Definizione 2.14 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice*

- *semicontinua inferiormente se $f^{-1}(]c, +\infty]) = \{x \in X \ : \ f(x) > c\}$ è aperto in X (o equivalentemente se l'insieme di sottolivello $\{x \in X \ : \ f(x) \leq c\}$ è chiuso) per ogni $c \in \mathbb{R}$;*
- *semicontinua superiormente se $f^{-1}([-\infty, c[) = \{x \in X \ : \ f(x) < c\}$ è aperto in X per ogni $a \in \mathbb{R}$.*

Esempio 2.15 Le funzioni caratteristiche di aperti sono semicontinue inferiormente, mentre le funzioni caratteristiche di chiusi sono semicontinue superiormente.

Esempio 2.16 Sia S un sottoinsieme di X. Si chiama *funzione indicatrice* di S la funzione

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ +\infty & \text{se } x \in X \setminus S \end{cases}$$

Le funzioni indicatrici di aperti sono semicontinue superiormente, mentre le funzioni indicatrici di chiusi sono semicontinue inferiormente.

Ricordiamo che una funzione è continua se le controimmagini degli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ sono aperti in X. Il seguente teorema è di agevole dimostrazione se si usa il fatto, non banale, che ogni aperto di $\overline{\mathbb{R}}$ si può scrivere come unione di intervalli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ (quindi compresi quelli del tipo $[-\infty, a[$ e $]b, +\infty]$), cioè gli intervalli aperti costituiscono una *base* per la topologia di $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 2.17 *f è continua se e solo se è semicontinua superiormente e inferiormente.*

Dimostrazione La necessità è banale. Proviamo la sufficienza, cioè supponiamo che f sia semicontinua superiormente ed inferiormente e dimostriamo che è continua. Sia A un insieme aperto di $\overline{\mathbb{R}}$, allora

$$A = \bigcup_{\gamma \in I} J_\gamma$$

dove J_γ sono intervalli aperti del tipo $]\alpha_\gamma, \beta_\gamma[$, $]\alpha_\gamma, +\infty]$ o $[-\infty, \beta_\gamma[$. Dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto. Poiché

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{\gamma \in I} J_\gamma\big) \\ &= \textstyle\bigcup_{\gamma \in I} f^{-1}\big(J_\gamma\big), \end{aligned}$$

e, poiché in conseguenzea delle ipotesi di semicontinuità ciascuno degli insiemi $f^{-1}\big(J_\gamma\big)$ è aperto, allora $f^{-1}(A)$ è aperto perché è unione di insiemi aperti. □

Dal momento che, fissato c, $\{x \in X \ : \ f(x) > c\}$ è aperto in X se e solo se per ogni $x \in X$ tale che $f(x) > c$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) > c$ per ogni $y \in U$, è naturale porre la seguente definizione.

Definizione 2.18 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* semicontinua inferiormente nel punto *x se e solo se per ogni $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > c$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) > c$ per ogni $y \in U$.*

Esercizio 2.19 Scrivere, per analogia con la precedente, la definizione di funzione semicontinua superiormente in un punto x.

Teorema 2.20 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente nel punto x se e solo se*

$$f(x) \le \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y) = f(x) \wedge \liminf_{y \to x} f(y) \le \liminf_{y \to x} f(y). \tag{2.1}$$

DIMOSTRAZIONE Ricordiamo che, per definizione,

$$\liminf_{y\to x} f(y) = \sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U\setminus\{x\}} f(y),$$

quindi l'uguaglianza e la seconda disuguaglianza sono immediate. Supponiamo che f sia semicontinua inferiormente, e dimostriamo la prima. A tal scopo, preso un arbitrario $\varepsilon > 0$ sia $c = f(x) - \varepsilon$. Allora, per la definizione 2.18, esiste un intorno U di x tale che

$$\inf_{y\in U} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

e si ha quindi, a maggior ragione

$$\sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

e la disuguaglianza cercata si ottiene ora passando al limite per $\varepsilon \to 0$. Viceversa, supponiamo che f soddisfi la condizione

$$f(x) \leq \sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y),$$

e sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > c$. Allora

$$c < \sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y)$$

e pertanto esiste $U \in \mathscr{U}(x)$ tale che $\inf_{y\in U} f(y) > c$, da cui $f(y) > c$ per ogni $y \in U$, e quindi per la definizione 2.18 f è semicontinua inferiormente in x. $\square$

Osservazione 2.21 Osservato che

$$\sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y) \leq \sup_{U\in\mathscr{U}(x)} f(x) = f(x),$$

allora si ha sempre che

$$f(x) \geq \sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y),$$

e quindi la prima disuguaglianza in (2.1) è in realtà un'uguaglianza.

Semicontinuità sequenziale

Definizione 2.22 *Una funzione* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *si dice* sequenzialmente semicontinua inferiormente *in un punto* $x \in X$ *se*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f(x_k) \quad \textit{per ogni } x_n \to x.$$

È facile verificare, utilizzando il Teorema 2.20 che la semicontinuità implica la semicontinuità sequenziale. Il viceversa, che non vale in generale (vedi Dal Maso [3], Example 1.6), è però vero negli spazi topologici che soddisfano il primo assioma di numerabilità. Vale cioè il seguente teorema per la cui dimostrazione rimandiamo a Dal Maso [3], Proposition 1.3.

Teorema 2.23 *Sia (X, d) uno spazio metrico (o più in generale soddisfacente al primo assioma di numerabilità). Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$ se e solo se f è sequenzialmente semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$.*

Vedi Dal Maso [3] per altre importanti proprietà delle funzioni semicontinue inferiormente, come ad esempio il fatto che l'estremo superiore di una famiglia qualunque di funzioni semicontinue inferiormente è ancora una funzione semicontinua inferiormente (Proposition 1.8).

Applicazioni a problemi di minimo

Teorema 2.24 (Weierstrass). *Sia X un spazio topologico, $K \subseteq X$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Assumiamo che*

1. *f sia semicontinua inferiormente su X;*
2. *K sia compatto e chiuso.*

Allora esiste il minimo di f su K.

Dimostrazione (Caso sequenziale) Diamo la dimostrazione dapprima nel caso in cui X è uno spazio metrico così si possono usare le caratterizzazioni sequenziali della semicontinuità e della compattezza. Sia (x_n) una successione *minimizzante*, cioè una successione di punti di U tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_K f$$

(dimostrare per esercizio che una successione siffatta esiste sempre, usando le proprietà dell'estremo inferiore). Poichè K è compatto, esiste (x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \to x \in K$, ma f è semicontinua inferiormente, quindi

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_K f.$$

da cui segue che x è un punto di minimo. □

Dimostrazione (Caso generale) Se f è la costante $+\infty$ non c'è nulla da provare. Altrimenti si ha

$$\inf\{f(x) \ : \ x \in K\} = M < +\infty$$

Poichè f è s.c.i. allora per ogni t l'insieme

$$C_t := \{x \in K : \ f(x) \leq t\} = K \cap \{x \in X : \ f(x) \leq t\}$$

è un sottoinsieme chiuso di K (come intersezione di due chiusi; qui si usa l'ipotesi: K chiuso) e quindi è compatto; per $t > M$ è anche non vuoto. La famiglia di chiusi $\{C_t\}_{t>M}$ essendo monotona crescente rispetto all'inclusione, gode della proprietà dell'intersezione finita e quindi, siccome K è compatto, non può essere vuoto l'insieme

$$\bigcap_{t>M} \{x \in K : \ f(x) \leq t\} = \{x \in K \ : \ f(x) \leq M\}.$$

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[2] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[3] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.