5 Quinta lezione: Topologie deboli

Topologia debole

Sia X uno spazio di Banach. La continuità delle applicazioni lineari $f : X \to \mathbb{R}$, dipende, per definizione, dalla topologia che si considera su X. Abbiamo definito lo spazio duale X^* come l'insieme di tutte le funzioni lineari $f : X \to \mathbb{R}$ che sono continue quando su X si considera la topologia della norma. Se indeboliamo la topologia su X, la continuità di una funzione può essere conservata oppure no. Si consideri ad esempio il caso della funzione costantemente uguale a zero $f(x) = 0$ per ogni $x \in X$. Questa funzione è continua quando su X c'è la topologia della norma ma anche quando su X consideriamo la topologia banale.

Definizione 5.1 *La* topologia debole $\sigma(X, X^*)$ *su X è la più debole tra le topologie su X che rendono continui gli elementi di X^*.*

Si potrebbe dimostrare (Brezis [1], Proposition III.4) che un sistema fondamentale di intorni di x_0 per la topologia debole è costituita da tutti gli insiemi della forma

$$W = \{x \in X \ : \ |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon \ \forall\, i \in I\}$$

dove I è un qualunque insieme finito di indici, $f_i \in X^*$ e $\varepsilon > 0$.

Osservazione 5.2 Si osserva che ciascuna delle disuguaglianze $|\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon$ definisce una regione (illimitata) compresa tra due iperpiani paralleli. Se la dimensione dello spazio X non è finita, un numero finito di iperpiani non può definire una regione limitata. In tal caso non vi sono intorni di zero limitati. Se vi fosse un intorno di x_0 limitato allora lo spazio avrebbe dimensione finita e la topologia debole coinciderebbe con quella della norma.

Data una successione (x_n) di elementi di X, diremo che essa *converge* ad x *debolmente,* e scriveremo

$$x_n \rightharpoonup x$$

se converge nella topologia $\sigma(X, X^*)$. Diremo che $x_n \to x$ *fortemente* e scriveremo

$$x_n \to x$$

se converge nella topologia della norma, cioè se e solo se $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.
La seguente proposizione riassume le principali proprietà della convergenza debole.

Proposizione 5.3 *Sia x_n una successione di elementi di X. Si ha*

1. $x_n \rightharpoonup x \iff \langle \varphi, x_n \rangle \to \langle \varphi, x \rangle \ \forall\, \varphi \in X^*$;
2. $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$;

3. *se* $x_n \rightharpoonup x$ *allora* $\|x_n\|$ *è limitata e* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$;

4. *se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *in* X^* *allora* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Dimostrazione *1.* $\Rightarrow$ è conseguenza diretta della definizione e del fatto che la continuità implica la continuità sequenziale.

$\Leftarrow$ Sia U un intorno di x per la topologia debole. Allora esiste un elemento W del sistema fondamentale contenuto in U, cioè esistono un insieme finito di indici I, delle funzioni $f_i \in X^*$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$W = \{y \in X \ : \ |\langle f_i, y - x\rangle| < \varepsilon \ \forall\, i \in I\} \subseteq U.$$

Poichè $\langle f_i, x_n\rangle \to \langle f_i, x\rangle$, allora $\langle f_i, x_n - x\rangle \to 0$ e perciò per ogni $i \in I$ esiste $N_i \in \mathbb{N}$ tale che $\langle f_i, x_n - x\rangle < \varepsilon$ per ogni $n > N_i$. Preso $N = \max_{i\in I} N_i$ si ha allora $x_n \in U$ per ogni $n > N$, e quindi $x_n \rightharpoonup x$.

2. Segue dalla precedente e dal fatto che $|\langle\varphi, x_n\rangle - \langle\varphi, x\rangle| \leq \|\varphi\|\|x_n - x\|$.

3. La limitatezza della successione $(\|x_n\|)$ è la cosa meno banale da provare. Infatti $x_n \rightharpoonup x$ implica (per quanto già provato in *1.*) che $\langle\varphi, x_n\rangle \to \langle\varphi, x\rangle \ \forall\varphi \in X^*$. Ne consegue che per ogni $\varphi \in X^*$ la successione $(\langle\varphi, x_n\rangle)_n$ è limitata, cioè esiste una costante C_φ tale che

$$|\langle\varphi, x_n\rangle| \leq C_\varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se potessimo affermare che la costante C_φ si può scegliere indipendentemente da φ, cioè esiste C tale che

$$|\langle\varphi, x_n\rangle| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall\varphi \in X^*,$$

cioè che la limitatezza della successione è uniforme rispetto a φ, allora la tesi sarebbe facilmente provata perchè

$$\|x_n\| = \sup\{|\langle\varphi, x_n\rangle| \ : \ \|\varphi\| \leq 1\} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La desiderata proprietà di limitatezza uniforme, non facile da dimostrare, è stabilita da uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Lineare:

Teorema 5.4 (Banach-Steinhaus o di limitatezza uniforme) *Sia X uno spazio di Banach e sia $\{F_j\}_{i\in J}$ una famiglia (qualunque) di funzioni lineari e continue da X in $\mathbb{R}$.*

$$\sup_{j\in J} |F_j x| < +\infty \ \forall\, x \in X \quad \Rightarrow \quad \sup_{j\in J} \|F_j\| < +\infty.$$

Nel caso in esame si prende $F_j(\varphi) = |\langle\varphi, x_j\rangle|$, sicchè $F_j : X^* \to \mathbb{R}$ e si usa il fatto che X^* è uno spazio di Banach. **Esercizio:** mostrare con semplici esempi che il teorema di Banach-Steinhaus non vale se si rinuncia all'ipotesi di linearità.

Rimane da provare la semicontinuità della norma. Poichè $|\langle\varphi, x_n\rangle| \leq \|\varphi\|\|x_n\|$, passando al liminf ambo i membri si ha

$$\liminf_{n\to\infty} |\langle\varphi, x_n\rangle| \leq \|\varphi\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

e poichè $x_n \rightharpoonup x$ e per la continuità del valore assoluto il primo membro è uguale a $|\langle \varphi, x\rangle|$ e perciò, dividendo per $\|\varphi\|$ si ha

$$\frac{|\langle \varphi, x\rangle|}{\|\varphi\|} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

e la tesi si ottiene passando al sup su φ.

4. Basta osservare che si ha

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leq |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\ &\leq \|f_n - f\|\|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \end{aligned}$$

e passare al limite per $n \to \infty$. □

Osservazione 5.5 Si potrebbe dimostrare che la topologia debole non è metrizzabile, a meno che lo spazio vettoriale X non abbia dimensione finita, nel qual caso la topologia debole coincide con quella della norma (esempio $\mathbb{R}^n$). Quindi i vari concetti di compattezza, continuità, ecc... rispetto alla topologia debole possono differire da quelli di sequenziale compattezza, sequenziale continuità, ecc...

Topologia debole*

Sia X uno spazio di Banach e X^* il suo duale. Si può poi considerare il duale di X^*, cioè lo spazio X^{**}. Ad ogni elemento $x \in X$ si può associare l'elemento Jx di X^{**} definito come segue

$$\begin{array}{rccl} Jx: & X^* & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \langle Jx, \varphi\rangle = \langle \varphi, x\rangle \end{array}$$

e si ha

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \sup\{|\langle Jx, \varphi\rangle| \ : \ \|\varphi\| \leq 1\} = \sup\{|\langle \varphi, x\rangle| \ : \ \|\varphi\| \leq 1\} = \|x\|_X.$$

Resta dunque definita un'isometria lineare

$$\begin{array}{rccl} J: & X & \to & X^{**} \\ & x & \mapsto & Jx, \end{array}$$

che permette di identificare X con un sottospazio di X^{**}; in tal senso cioè $X \subseteq X^{**}$. Se J è anche suriettiva (cosa che non succede sempre) allora si può identificare X con X^{**} e si dice che X è uno spazio *riflessivo*.

Analogamente a quanto fatto per la topologia $\sigma(X, X^*)$, per ogni $Y \subseteq X^*$ si può definire la topologia $\sigma(X, Y)$ come la più debole tra le topologie che rendono continui gli elementi di Y. Così sullo spazio X^* possiamo considerare la topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$ oppure anche la topologia $\sigma(X^*, X)$ (considerando $X \subseteq X^{**}$) che, per distinguerla dalla precedente, prende il nome di *topologia debole**.

Un sistema fondamentale di intorni di $f_0 \in X^*$ per la topologia debole* è costituito dagli insiemi della forma

$$V = \{f \in X^* \ : \ |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon \ \forall\, i \in I\}$$

dove I è un insieme finito, $x_i \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Per indicare che una successione (f_n) di elementi di X^* converge debolmente* ad un limite f scriveremo

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

La seguente proposizione riassume le proprietà della convergenza debole*, analoghe a quelle della convergenza debole.

Proposizione 5.6 *Sia f_n una successione di elementi di X^*. Si ha*

1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \; \forall\, x \in X$;
2. $f_n \rightharpoonup f$ *(i.e. in $\sigma(X^*, X^{**})$)* $\Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$; *in particolare la convergenza forte implica la debole*;*
3. *se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *allora* $\|f_n\|$ *è limitata e* $\|f\| \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$;
4. *se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \to x$ *in* X *allora* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Osservazione 5.7 Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \rightharpoonup x$, in generale non si ha che $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$. Esempi concreti verranno visti negli spazi L^p.

Se X ha dimensione finita allora le tre topologie coincidono. Per le topologie deboli valgono i seguenti teoremi di compattezza utili nella risoluzione di problemi di minimo; le dimostrazioni si trovano in Brezis [1].

Teorema 5.8 (Alaoglu) *La palla chiusa $B_{X^*} = \{f \in X^* \;:\; \|f\| \le 1\}$ è compatta per la topologia debole*.*

Teorema 5.9 (Kakutani) *Sia X uno spazio di Banach. X è riflessivo se e solo se la palla chiusa $B_X = \{x \in X \;:\; \|x\| \le 1\}$ è compatta per la topologia debole.*

Riferimenti bibliografici

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[2] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[3] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[4] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[5] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[6] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.