# 14 Quattordicesima lezione: Teoremi di semicontinuità. Caso vettoriale

Sia $\Omega$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f\left(\nabla u\right)\, dx,$$

dove $u$ questa volta è una funzione definita su $\Omega$ a valori in $\mathbb{R}^m$ (cioè una funzione vettoriale di variabile vettoriale). Ricordiamo che se $f \geq 0$, la convessità di $f$ è una condizione sufficiente per la semicontinuità inferiore debole in $W^{1,p}$.

Volendo cercare delle condizioni necessarie, si suppone per ipotesi che il funzionale sia sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente, cioè che per ogni successione $(u_n)$ convergente debolmente ad una funzione $u$, risulti

$$F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n),$$

e si cercano conseguenze di questo fatto considerando opportuni casi particolari. Utili conseguenze si traggono ad esempio nel caso in cui si sappia che il gradiente di $u$ è costante, cioè scrivendo la disuguaglianza di semicontinuità per le funzioni lineari $u_\xi(x) = \xi \cdot x$ che possono essere viste come limiti deboli di successioni $u_n$ ottenute come variazioni di $u_\xi$ mediante funzioni $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ $(u_n = u_\xi + \varphi_n)$. In tal caso si ha

$$\begin{aligned} &F(u_n) = F(u_\xi + \varphi_n) = \int_\Omega f\left(\xi + \nabla\varphi_n(x)\right)\, dx,\\ &F(u_\xi) = |\Omega| f(\xi). \end{aligned}$$

Se $f$ fosse convessa, si potrebbe dimostrare la disuguaglianza di semicontinuità utilizzando la disuguaglianza di Jensen, nel modo seguente

$$\begin{aligned} F(u_n) = F(u_\xi + \varphi_n) = \int_\Omega f\left(\xi + \nabla\varphi_n(x)\right)\, dx \geq \\ \geq |\Omega| f\Big(\int_\Omega \big(\xi + \nabla\varphi_n(x)\big)\, dx\Big) = |\Omega| f(\xi) = F(u_\xi). \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è ottenuta integrando per parti e sfruttando il fatto che $\varphi$ è nulla sulla frontiera di $\Omega$. In generale l'ipotesi di convessità non è necessaria, mentre invece è necessario che valga la disuguaglianza appena scritta.

Ricordiamo che nei casi scalari ($n = 1$ o $m = 1$) se $f \geq 0$ e soddisfa una condizione di crescita $p$ dall'alto, allora la convessità di $f$ è una condizione necessaria e sufficiente per la semicontinuità inferiore debole in $W^{1,p}$. In tali casi infatti la convessità è equivalente alla disuguaglianza di Jensen (vedi Rudin [23], Capitolo 3 esercizio 20).

Vedremo che negli altri casi, cosiddetti vettoriali, la convessità di $f$ non è necessaria (quindi è solo sufficiente) per la semicontinuità.

**Definizione 14.1** *Sia $\mathbb{R}^{m\times n}$ lo spazio delle matrici $m \times n$ di numeri reali (isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$). Una funzione $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ si dice* quasi-convessa *(brevemente QC) se è*

*$\mathscr{B}_{m\times n}$-misurabile, localmente integrabile e verifica la disuguaglianza (tipo Jensen)*

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\left(\xi+\nabla\varphi(x)\right)\,dx \geq f(\xi) \tag{14.1}$$

*per ogni $\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}$, ogni $\varphi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e ogni $\Omega$ aperto limitato di $\mathbb{R}^n$* (si vede facilmente, con opportuni cambiamenti di variabile, che se vale per un aperto $\Omega$ limitato e non vuoto allora vale per tutti).

Ogni funzione $f:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ (i valori sono finiti!) convessa è quasi-convessa. Infatti $f$ è continua e quindi localmente integrabile e la (14.1) segue, come sopra, dalla disuguaglianza di Jensen.

Se $m=1$ o $n=1$ si può dimostrare che ogni funzione quasi-convessa è convessa (seguirà dal teorema 14.8).

**Esempio 14.2** Sia $m=n=2$. La funzione $f(\xi)=\det\xi=\xi_{11}\xi_{22}-\xi_{12}\xi_{21}$ non è convessa, come si vede ad esempio restringendola alla retta $\xi_{11}=\xi_{22}=0$, $\xi_{21}=\xi_{12}$.

Però è quasi-convessa, infatti, se $u\in C^2(\overline{A};\mathbb{R}^2)$, usando il teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_A \det\nabla u(x)\,dx &= \int_A (D_1u_1D_2u_2-D_2u_1D_1u_2)\,dx\\
&= \int_A \big(D_1(u_1D_2u_2)-D_2(u_1D_1u_2)\big)\,dx\\
&= \int_{\partial A} (u_1D_2u_2,-u_1D_1u_2)\cdot(\nu_1,\nu_2)\,dS\\
&= \int_{\partial A} u_1(D_2u_2,D_1u_2)\cdot(\nu_1,-\nu_2)\,dS\\
&= \int_{\partial A} u_1\nabla u_2\cdot(-\nu_2,\nu_1)\,dS\\
&= \int_{\partial A} u_1\nabla u_2\cdot\tau\,dS\\
&= \int_{\partial A} u_1D_\tau u_2\,dS
\end{aligned}$$

dove $\nu=(\nu_1,\nu_2)$ è il versore della normale esterna alla frontiera di $A$, e quindi $\tau=(-\nu_2,\nu_1)$ è un versore tangente alla frontiera di $A$. Dunque l'integrale $\displaystyle\int_A \det\nabla u\,dx$ dipende solo dai valori di $u$ su $\partial A$. Allora, se si sceglie $u(x)=\xi x+\varphi(x)$ con $\varphi\in C_c^\infty(A;\mathbb{R}^2)$ e $\xi\in\mathbb{R}^{2\times2}$, si ha

$$\int_A \det(\xi+\nabla\varphi(x))\,dx=\int_A\det\xi\,dx=|A|\det\xi.$$

Osserviamo che siccome vale l'uguaglianza, anche $-\det\xi$ è quasi-convessa. Le funzioni che hanno questa proprietà si chiamano *quasi-affini* (in analogia col fatto che se $f$ e $-f$ sono entrambe convesse allora $f$ è affine), o anche *Lagrangiani nulli (null Lagrangians)* perchè le equazioni di Eulero-Lagrange sono invarianti rispetto a perturbazioni additive dell'integrando con funzioni di questo tipo.

Il risultato dell'esempio vale per $n = m$ qualunque. Se $n \neq m$ non ha senso parlare di determinante ma, procedendo in maniera analoga, lo stesso risultato si ottiene per il determinante di qualunque minore di $\xi$ e si estende immediatamente alle funzioni affini dei determinanti di tutti i minori di $\xi$, perché la somma di funzioni QC è QC. Il seguente teorema mostra che lo stesso risultato vale anche per le funzioni convesse dei determinanti dei minori di $\xi$, che si chiamano *policonvesse* (brevemente PC).

Più precisamente:

**Definizione 14.3** Una funzione $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ si dice *policonvessa* se esiste una funzione $g : \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ convessa tale che $f(\xi) = g(M(\xi))$, dove $M(\xi)$ denota il vettore di $\mathbb{R}^{mn}$ composto dai determinanti di tutti i minori della matrice $\xi$

**Proposizione 14.4** *PC $\Rightarrow$ QC.*

Dimostrazione Infatti se $f$ è una funzione policonvessa allora, indicato con $M(\xi)$ il vettore composto dai determinanti di tutti i minori della matrice $\xi$, esiste una funzione convessa $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(\xi) = g(M(\xi)).$$

Poiché ogni funzione convessa è rappresentabile come estremo superiore di una successione di funzioni affini, allora $f(\xi)$ è estremo superiore di funzioni affini di $M(\xi)$, e quindi è estremo superiore di funzioni QC. La conclusione discende dal seguente lemma.

**Lemma 14.5** *Sia $(f_h)$ una successione di funzioni QC. Se $f(\xi) = \sup_{h\in\mathbb{N}} f_h(\xi)$ è localmente integrabile allora $f$ è QC.*

Dimostrazione Basta osservare che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{1}{|A|}\int_A f\big(\xi + \nabla\varphi(x)\big)\,dx \geq \frac{1}{|A|}\int_A f_h\big(\xi + \nabla\varphi(x)\big)\,dx \geq f_h(\xi)$$

e la tesi segue dunque passando al sup su $h$. □

Non vale il viceversa della proposizione 14.4. Per un esempio si rinvia a Dacorogna [8], Capitolo 4, Theorem 1.7.

**Definizione 14.6** *Una funzione $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ si dice* convessa di rango uno *(brevemente R1C) se*

$$f\left(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2\right) \leq \lambda f(\xi_1) + (1-\lambda)f(\xi_2)$$

*ogniqualvolta $\xi_1$ e $\xi_2$ differiscono per una matrice di rango 1.*

Cosa significa? Tutte le matrici $\xi$ di dimensione $m \times n$ di rango 1 sono prodotti tensoriali di un vettore di $\mathbb{R}^m$ per uno di $\mathbb{R}^n$: $\xi = a \otimes b$, cioè $\xi = (a_i b_j)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$.

Quindi la condizione di convessità di rango 1 è equivalente a dire che la funzione

$$t \to f(\xi + t\, a \otimes b)$$

è convessa in $\mathbb{R}$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ogni $a \in \mathbb{R}^m$ ed ogni $b \in \mathbb{R}^n$; in altre parole la convessità di rango 1 è caratterizzabile come la convessità lungo le rette di $\mathbb{R}^{m\times n}$ la cui direzione è determinata da una matrice della forma $a \otimes b$.

**Osservazione 14.7** Per funzioni di classe $C^2$ la convessità è equivalente alla positività della forma Hessiana, cioè a

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} f_{\xi_i^\alpha \xi_j^\beta} A_i^\alpha A_j^\beta \geq 0 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

La convessità di rango uno invece è equivalente alla seguente condizione di Legendre-Hadamard:

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} f_{\xi_i^\alpha \xi_j^\beta} a^\alpha a^\beta b_i b_j \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^m,\ b \in \mathbb{R}^n$$

che corrisponde alla scelta $A = a \otimes b$ nella formula precedente.

**Teorema 14.8** *Le funzioni quasi-convesse sono convesse di rango 1 (QC $\Rightarrow$ R1C).*

Per la dimostrazione, che si basa sul metodo dello zig-zag, rimandiamo a Dal Maso [10], Teorema 1.14.

Riassumento, abbiamo la seguente catena di implicazioni

$$C \quad \Rightarrow \quad PC \quad \Rightarrow \quad QC \quad \Rightarrow \quad R1C$$

**Osservazione 14.9** Se $n = 1$ o $m = 1$ R1C è equivalente a C, e quindi sono tutte equivalenti. Se $n > 1$ ed $m > 1$ R1C non implica QC come mostrato in un controesempio di Šverák [24].

**Teorema 14.10** *Se $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ è quasi-convessa allora il funzionale*

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx$$

*è $w^*W^{1,\infty}$ s.c.i.; se inoltre esiste $p \in (1, +\infty)$ tale che*

$$f(\xi) \leq c(1 + |\xi|^p) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

*allora $F$ è $w^*W^{1,p}$ s.c.i..*

Per la dimostrazione rimandiamo a Dal Maso [10], Teorema 4.15 e Teorema 4.16.

**Esempio 14.11** Il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega |\det \nabla u| \, dx$$

è sequenzialmente debolmente s.c.i. in $W^{1,p}$ per ogni $p \geq n$.

**Osservazione 14.12** Nel precedente teorema e nel caso $p < \infty$ l'ipotesi $f \geq 0$ può essere sostituita con la più debole

$$-c(1 + |\xi|^r) \leq f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

con $1 \leq r < p < \infty$.

Ne consegue che il funzionale

$$G(u) = \int_\Omega \det \nabla u \, dx$$

è sequenzialmente debolmente continuo in $W^{1,p}$ per ogni $p > n$. Osserviamo che questo è un esempio di funzione non lineare debolmente continua.

**Osservazione 14.13** Si potrebbe mostrare con opportuni controesempi che il teorema non vale se $p = 1$. D'altra parte, se $f$ ha crescita lineare il funzionale non può essere coercivo perché gli insiemi

$$\{u \in W^{1,1}(\Omega) \ : \ \int_\Omega |Du| \, dx \leq t\}$$

non sono relativamente sequenzialmente compatti in $W^{1,1}(\Omega)$ anche se munito della topologia debole. Per questo motivo siamo portati a definire i funzionali con crescita lineare non gradiente su uno spazio più grande di $W^{1,1}$ e precisamente spazi di funzioni a variazione limitata (e.g. curve rettificabili, $BV(\Omega)$ o $SBV(\Omega)$) e cercare di stabilire per questi funzionali dei teoremi di semicontinuità. Per una trattazione approfondita di tali questioni si può vedere ad esempio il libro di Ambrosio, Fusco e Pallara [2] oppure le note di un corso di Buttazzo [6] per una presentazione più didattica. Osserviamo anche che in questo difficile caso rientrano alcuni dei problemi più importanti del Calcolo delle Variazioni; ad esempio quelli delle geodetiche, della brachistocróna e di Fermat, per citare solamente quelli menzionati all'inizio del corso.

**Teorema 14.14** *Sia $f : \mathbb{R}^{m \times n} \to [0, +\infty)$ misurabile e localmente limitata. Supponiamo che il funzionale*

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u) \, dx$$

*sia sequenzialmente s.c.i. nella topologia debole* di $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Allora $f$ è QC.*

Per la dimostrazione rimandiamo a Dal Maso [10], Teorema 4.18.

## Riferimenti bibliografici


[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco, and Pallara D., *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[3] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[5] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[6] G. Buttazzo, *Semicontinuità inferiore di funzionali definiti su BV*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana **39** (1995), 197–235.

[7] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[8] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 78, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

[9] G. Dal Maso, *An introduction to* $\Gamma$*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[10] G. Dal Maso, *Problemi di semicontinuità e rilassamento nel calcolo delle variazioni*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana **39** (1995), 145–196.

[11] E. De Giorgi, *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Lezioni tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, a.a. **1**968-69 Roma, 1969.

[12] E. De Giorgi, G. Buttazzo, and G. Dal Maso, *On the lower semicontinuity of certain integral functionals*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **74** (1983), no. 5, 274–282.

[13] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.

[14] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1976.

[15] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[16] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Springer, Berlin, 1992.

[17] A.D. Ioffe, *On lower semicontinuity of integral functionals I, II*, SIAM J. Control Optim. **15** (1977), 521–538, 991–1000.

[18] A.D. Ioffe and V.M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Studies in Mathematics and its Applications, 6, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.

[19] N. Meyers and J. Serrin, *H=W*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).

[20] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.

[21] C. Olech, *A characterization of $L^1$-weak lower semicontinuity of integral functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), 135–142.

[22] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.

[23] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.

[24] V. Šverák, *Rank-one convexity does not imply quasiconvexity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **120** (1992), no. 1-2, 185–189.

[25] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.

[26] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.