

4 Quarta lezione: Spazi di Banach e funzionali lineari. Spazio duale

Spazi Metrici

Ricordiamo che uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ è una funzione, detta *metrica*, che gode delle seguenti proprietà

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Esempio 4.1 Su ogni insieme X la funzione

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una metrica (detta *metrica banale*).

Esempio 4.2 Su \mathbb{R}^n la funzione

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

è una metrica (detta *metrica euclidea*).

Esempio 4.3 Su \mathbb{R}^n le funzioni

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad d_2(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$$

sono metriche.

In uno spazio metrico (X, d) l'insieme

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}, \quad x_0 \in X, r > 0$$

è la superficie sferica (o sfera) di raggio r , mentre l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, \quad x_0 \in X, r > 0$$

è la palla aperta di centro x_0 e raggio r .

In uno spazio metrico le famiglie

$$\{B(x, r) : x \in X, r > 0\},$$

$$\{B(x, r) : x \in X, r > 0, r \in \mathbb{Q}\},$$

$$\{B(x, 1/n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$$

sono sistemi fondamentali di intorni e pertanto ne individuano la topologia. Ciò implica in particolare che ogni spazio metrico soddisfa al primo assioma di numerabilità. Ad una metrica è quindi sempre associata una topologia, ma non viceversa, cioè esistono topologie che non sono descrivibili da una metrica, cioè non sono *metrizzabili*. Inoltre metriche diverse possono individuare la stessa topologia, e in tal caso si dicono *topologicamente equivalenti*. Per esempio le metriche d_1 e d_2 dell'Esempio 4.3 inducono entrambe la topologia euclidea, cioè definiscono gli stessi insiemi aperti. Per dimostrare che due metriche d_1 e d_2 sono equivalenti basta mostrare che per ogni palla $B(x, \varepsilon_1)$ di (X, d_1) esiste una palla $B(x, \varepsilon_2)$ di (X, d_2) contenuta in $B(x, \varepsilon_1)$ e viceversa.

Esercizio 4.4 Disegnare le palle di centro 0 e raggio 1 in (\mathbb{R}^2, d_1) e in (\mathbb{R}^2, d_2) .

Esempio 4.5 Nella metrica banale dell'esempio 4.1 si ha

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } r \leq 1 \\ X & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.6 Scrivere le definizioni di *successione convergente*, di *funzione continua* e *sequenzialmente continua* in uno spazio metrico (X, d) e ricordare che, poiché gli spazi metrici soddisfano al primo assioma di numerabilità allora la continuità equivale alla continuità sequenziale.

Spazi normati

Ricordiamo che uno *spazio normato* (su \mathbb{R}) è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ dove X è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$ è una funzione, detta *norma*, che gode delle seguenti proprietà

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in X$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

Una norma su X induce sempre una metrica

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

e pertanto definisce una topologia. La norma di un punto x rappresenta dunque la sua distanza dall'origine mentre la norma di un vettore rappresenta la sua lunghezza.

Esempio 4.7 In \mathbb{R}^n la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

induce la metrica euclidea ed è pertanto detta *norma euclidea*. Altre norme che inducono la stessa topologia (ma non la stessa metrica) sono

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{e} \quad \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

Esempio 4.8 Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . La funzione

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

è una norma nello spazio delle funzioni sommabili $L^1(\Omega)$ (è importante, qui, affinché valga la prima proprietà della norma, identificare funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla). Questa è una norma anche nello spazio delle funzioni continue a supporto compatto $C_c(\Omega)$.

La funzione

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

è una norma nello spazio $B(\Omega)$ delle funzioni limitate su Ω , ma non lo è in $L^1(\Omega)$. $\|\cdot\|_{\infty}$ è una norma in $C_c(\Omega)$, o anche in $C_c^k(\Omega)$, mentre un'altra norma in $C_c^1(\Omega)$ è la seguente

$$\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_{\infty} + \|\nabla f\|_{\infty}.$$

Definizione 4.9 Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sullo stesso spazio X si dicono equivalenti se inducono la stessa topologia.

È subito visto che due norme sono equivalenti se e solo se generano metriche equivalenti, cioè, dette $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ le due norme, se e solo se esistono due costanti positive c e C tali che

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

per ogni $x \in X$.

Esercizio 4.10 Mostrare che nello spazio $C_0^1([0, 1])$ delle funzioni $C^1([0, 1])$ tali che $u(0) = u(1) = 0$, le norme $\|u'\|_{\infty}$ e $\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty}$ sono equivalenti.

Poichè

$$\|u'\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty} = \|u\|_{1,\infty}$$

basta mostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$c\|u\|_{\infty} \leq \|u'\|_{\infty}$$

(infatti in tal caso si avrebbe $\frac{c}{1+c}\|u\|_{1,\infty} \leq \|u'\|_{\infty}$). Per provarlo basta osservare che

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt$$

e pertanto

$$|u(x)| \leq \left| \int_0^x |u'(t)| dt \right| \leq \left| \int_0^1 \sup_{t \in [0,1]} \|u'(t)\|_{\infty} dt \right| = \|u'\|_{\infty}.$$

La tesi segue dunque passando al sup sugli $x \in [0, 1]$. Concludiamo osservando che la condizione $u(1) = 0$ non è stata utilizzata.

Funzionali lineari. Spazio duale

Osserviamo che la convergenza debole introdotta nella lezione precedente è la convergenza più debole che rende continui tutti i prodotti scalari con funzioni di L^2 . Per il teorema di rappresentazione di Riesz, d'altra parte, i prodotti scalari sono esattamente tutte e sole le funzioni lineari e fortemente continue $L^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Possiamo quindi dire che la convergenza debole è la più debole tra le convergenze che rendono continue tutte le applicazioni lineari e fortemente continue $L^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

La trasposizione topologica di questo concetto conduce alla nozione di topologia debole. Poiché le funzioni lineari e continue giocano un ruolo essenziale ricordiamo alcune cose fondamentali su di esse.

Quando il dominio X è \mathbb{R}^n vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.11 *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare se e solo se è un prodotto scalare, cioè se e solo se esiste $a \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = \langle a, x \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

DIMOSTRAZIONE Se $f(x) = \langle a, x \rangle$, allora è ovviamente lineare. Viceversa, supponiamo che f sia lineare e non identicamente nulla (altrimenti basta prendere $a = 0$). In tal caso $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} \neq \mathbb{R}^n$. Sia dunque $x_0 \in \ker f^\perp$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Consideriamo il vettore $x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$ e osserviamo che, per la linearità

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) = 0$$

Dunque $x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in \ker f$ e quindi

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0, x_0 \right\rangle = 0$$

da cui, sviluppando il prodotto scalare a primo membro, si ottiene

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} \langle x_0, x \rangle.$$

□

Come conseguenza in \mathbb{R}^n tutte le applicazioni lineari sono continue, perché tutte le lineari sono prodotti scalari e se $f(x) = \langle a, x \rangle$ allora, per Cauchy-Schwarz, si ha

$$|f(x)| \leq \|a\| \|x\|$$

e quindi f è continua (lipschitziana) per la topologia della norma.

A differenza di \mathbb{R}^n , in spazi vettoriali di dimensione infinita esistono sempre funzioni lineari $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ non continue. Diamo subito un esempio.

Esempio 4.12 Consideriamo lo spazio delle funzioni continue $C([-1, 1])$ con la norma $\|u\|_1 = \int_{-1}^1 |u| dt$. La funzione

$$\begin{aligned} \delta_0 : C([-1, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \delta_0(\varphi) = \varphi(0) \end{aligned}$$

è lineare (ovviamente) ma non è continua. Si consideri infatti la successione di funzioni $\varphi_n \in C([-1, 1])$ tale che $\varphi_n(0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ per ogni $|x| \geq 1/n$ e prolungata linearmente su $[-1, 1]$. Si ha

$$\|\varphi\|_1 = \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx = 1/n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Si dunque $\varphi_n \rightarrow 0$ in norma. Ora, se δ_0 fosse continua allora si avrebbe

$$\delta_0(\varphi_n) \rightarrow \delta_0(0)$$

ma questo non è possibile perché $\delta_0(\varphi_n) = 1$ per ogni n mentre $\delta_0(0) = 0$.

Per la disuguaglianza di Schwarz d'altra parte i prodotti scalari sono continui. Abbiamo già ricordato, infatti, che se il dominio X è uno spazio di Hilbert allora vale il seguente teorema di rappresentazione di Riesz, la cui dimostrazione procede essenzialmente come quella in cui $X = \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.13 *Sia X uno spazio di Hilbert. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare e continua se e solo se è un prodotto scalare, cioè se e solo se esiste $a \in X$ tale che $f(x) = \langle a, x \rangle$ per ogni $x \in X$.*

Osserviamo che se $X = L^2$ allora il teorema di Riesz dice che ogni funzionale $F : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e fortemente continuo ammette la rappresentazione integrale

$$F(u) = \int g(x)u(x) dx$$

dove g è un'opportuna funzione di L^2 e si tratta quindi di un teorema di rappresentazione integrale.

Se X è solamente uno spazio vettoriale normato, ma in cui la norma non proviene da un prodotto scalare, vale il risultato seguente.

Proposizione 4.14 *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, una funzione lineare. f è continua se e solo se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$(4.1) \quad |f(x)| \leq L\|x\| \quad \text{per ogni } x \in X.$$

DIMOSTRAZIONE L'unica parte non banale è \Rightarrow . Supponiamo dunque f continua. In particolare f è continua in 0, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

In particolare, in corrispondenza ad $\varepsilon = 1$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1.$$

Sia x' qualunque, diverso da 0. Preso $x = \frac{\delta x'}{2\|x'\|}$ si ha $\|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e pertanto $|f(x)| < 1$. Ma d'altra parte $|f(x)| = \frac{\delta f(x')}{2\|x'\|}$ e perciò $\frac{|f(x')|}{\|x'\|} < \frac{2}{\delta} = L$. \square

Osservazione 4.15 Anche negli spazi normati le funzioni lineari e continue sono lipschitziane.

Dato uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, un altro importante esempio di spazio normato che si può costruire a partire da X è il cosiddetto *spazio duale* di X , X^* , costituito da tutte le funzioni lineari e continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione con un numero reale. Una norma in questo spazio è data dalla più piccola costante per cui vale la (4.1), cioè

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_{X^*} &= \sup\left\{\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} \\
 (4.2) \qquad &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \\
 &= \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| = 1\},
 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue osservando che per la linearità $\varphi(0) = 0$ e $0 < \|x\| \leq 1 \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(x/\|x\|)$. Con questa definizione e usando la notazione $\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x)$ si può quindi scrivere

$$|\langle \varphi, x \rangle| \leq \|\varphi\| \|x\|.$$

Teorema di Hahn-Banach

Negli spazi normati ogni funzione lineare e continua definita su un sottospazio si può estendere ad una funzione lineare e continua su tutto lo spazio senza incrementarne la norma.

Teorema 4.16 *Sia X uno spazio vettoriale normato e M un sottospazio di X (cioè un sottoinsieme di X chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare). Sia*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione lineare e continua.

Esiste una funzione lineare e continua $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. $\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in M$;
2. $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

La dimostrazione di questo teorema (che non faremo) fa uso dell'Assioma della Scelta.

Una sua importante conseguenza è la seguente formula “duale” della (4.2)

$$\begin{aligned}
 \|x\| &= \max\left\{\frac{|\langle \varphi, x \rangle|}{\|\varphi\|} : \varphi \in X^*\right\} && \forall x \in X. \\
 &= \max\{|\langle \varphi, x \rangle| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| = 1\}
 \end{aligned}$$

Infatti, se $x = 0$ la formula è vera. Supponiamo $x \neq 0$. Siccome $|\langle \varphi, x \rangle| \leq \|\varphi\| \|x\|$ allora

$$\sup\left\{\frac{|\langle \varphi, x \rangle|}{\|\varphi\|} : \varphi \in X^*\right\} \leq \|x\|.$$

La formula sarà dunque provata se dimostreremo che esiste $\varphi \in X^*$ tale che

$$(4.3) \quad \|\varphi\| = \|x\| \quad \text{e} \quad \langle \varphi, x \rangle = \|x\|^2.$$

A tal scopo sia $M = \{tx : t \in \mathbb{R}\}$ il sottospazio di X generato da x . Su questo sottospazio consideriamo la funzione lineare e continua

$$\varphi(tx) = t\|x\|^2;$$

questa funzione per il momento è definita solo su M e soddisfa le (4.3). Ma per il Teorema di Hahn-Banach essa si può prolungare su tutto X ad una φ che soddisfa ancora le condizioni (4.3). \square

Spazi metrici completi

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 4.17 Una successione (x_n) di elementi di X si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m > n_\varepsilon$.

Si dimostra facilmente che ogni successione convergente è anche di Cauchy. Il viceversa non è vero, in generale. Per esempio è falso in \mathbb{Q} come sottospazio topologico di \mathbb{R} con la metrica euclidea. Quello che comunque si riesce a dimostrare in generale è che ogni successione di Cauchy è limitata (procedere come in Analisi 1).

Definizione 4.18 Uno spazio metrico X si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente ad un punto di X .

Esempio 4.19 \mathbb{R} con la metrica euclidea è completo, mentre \mathbb{Q} non lo è.

Gli spazi normati che sono completi rispetto alla metrica indotta dalla norma si dicono *spazi di Banach*.

Esempio 4.20 $(L^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach. Se Ω è compatto $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ e $(C^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\infty})$ sono spazi di Banach.

Esercizio 4.21 Mostrare che

1. $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ è normato ma non è completo.
2. $C_c(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_1$ o con la norma $\|\cdot\|_\infty$ non è completo.

Proposizione 4.22 Sia X uno spazio vettoriale normato.⁷ X^* con la norma duale è di Banach.

⁷Anche non completo.

DIMOSTRAZIONE Dimostriamo che X^* è completo. Sia dunque (T_n) una successione di Cauchy in X^* , cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$ per ogni $m, n > n_\varepsilon$. Per definizione di norma duale allora per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ si ha anche $|T_mx - T_nx| < \varepsilon$. Ne consegue che per tali x la successione $(T_nx)_n$ è di Cauchy in \mathbb{R} e quindi è convergente (\mathbb{R} è completo). Detto Tx il suo limite è banale verificare che T è lineare. Basta ora provare che $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, perché da ciò segue anche che T è continua. Infatti, essendo

$$|Tx| \leq |Tx - T_nx| + |T_nx|$$

allora

$$\|T\| \leq \|T - T_n\| + \|T_n\|$$

e poiché la successione $(\|T_n\|)$ è limitata (essendo di Cauchy) allora si ha che $\|T\| < \infty$, cioè T è continua. Proviamo dunque che $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Avendosi

$$|Tx - T_nx| \leq |Tx - T_mx| + |T_mx - T_nx| \leq |Tx - T_mx| + \|T_m - T_n\|\|x\|,$$

e poiché il primo membro è indipendente da m , allora passando al limite per $m \rightarrow \infty$ si ottiene che

$$\|T - T_n\| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

e quindi la tesi. □

Completamento di uno spazio metrico

Se uno spazio metrico non è completo, come ad esempio $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, lo si può completare immergendolo isometricamente in uno spazio completo, come ad esempio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. L'esistenza e l'unicità (a meno di isometrie) del completamento è garantita dal Teorema del Completamento (cfr. per esempio [3], pag. 182).

Riferimenti bibliografici

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
- [2] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.
- [3] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.
- [4] G. Dal Maso, *An introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [5] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.
- [6] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.