

8 Ottava lezione: Spazi di Sobolev

Definizioni e proprietà topologiche

Per tutta la lezione, se non altrimenti specificato, tutte le derivate si intendono in senso distribuzionale, Ω indicherà un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq +\infty$.

Lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ è definito da

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D_\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq m\}.$$

Se $m = 0$ si ha $W^{m,p} = L^p$. Lo spazio vettoriale $W^{m,p}(\Omega)$ potrà essere munito della norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } p < +\infty,$$

oppure

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{se } p = +\infty,$$

o altre norme equivalenti.

Teorema 8.1 ($W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p}$) è uno spazio

1. di Banach per $1 \leq p \leq +\infty$,
2. riflessivo per $1 < p < +\infty$,
3. separabile per $1 \leq p < +\infty$.

1. Sia (u_h) una successione di Cauchy in $W^{m,p}$; allora $(D^\alpha u_h)$ è di Cauchy in L^p per $|\alpha| \leq m$. Di conseguenza, poiché L^p è completo, esistono delle funzioni u e u_α , $0 < |\alpha| \leq m$, in L^p tali che $u_h \rightarrow u$ e $D^\alpha u_h \rightarrow u_\alpha$ in L^p . Per ottenere la tesi basta provare che, per tali α , si ha $u_\alpha = D_\alpha u$ in L^p .

Poiché $L^p \subset L^1_{\text{loc}}$ le (u_h) individuano una distribuzione $T_{u_h} \in \mathcal{D}'$ che d'ora in poi continueremo ad indicare con u_h . Nel senso delle distribuzioni si ha, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(8.1) \quad \langle D_\alpha u_h, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_h, D_\alpha \varphi \rangle$$

e, poiché la convergenza forte in L^p implica la debole e la debole implica la convergenza in \mathcal{D}' (mostrarlo per esercizio), allora, passando al limite per $h \rightarrow \infty$ nella (8.1), si ha che

$$\langle u_\alpha, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D_\alpha \varphi \rangle;$$

d'altra parte, per definizione di derivata distribuzionale il secondo membro è uguale a $\langle D_\alpha u, \varphi \rangle$ per cui si ha

$$\langle u_\alpha, \varphi \rangle = \langle D_\alpha u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

cioè $u_\alpha = D_\alpha u$ in \mathcal{D}' , e la tesi segue dall'iniettività dell'immersione di L^1_{loc} in \mathcal{D}' . \square

2. Sia $N = N(n, m) = \sum_{|\alpha| \leq m} 1$ il numero di multi-indici $\alpha \in \mathbb{N}^n$ che soddisfano la condizione $|\alpha| \leq m$. Poichè $L^p(\Omega)$ è riflessivo per $1 < p < +\infty$ allora anche lo spazio prodotto $E = L^p(\Omega)^N$ è riflessivo. L'operatore $T : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow E$ definito da $Tu = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}$, ove i multi-indici α si suppongono convenientemente ordinati, è un'isometria lineare e iniettiva da $W^{m,p}(\Omega)$ in E con la norma $\|v\|_E = (\sum_{j=1}^N \|v_j\|_p^p)^{1/p}$. Poiché $W^{m,p}(\Omega)$ è completo allora anche $T(W^{m,p}(\Omega))$ è completo. Ora, ogni sottospazio completo di uno spazio metrico è anche chiuso (dimostrarlo per esercizio o vedere [5], Capitolo sesto, Proposizione 2.6), quindi $M = T(W^{m,p}(\Omega))$ è un sottospazio vettoriale chiuso di E . Consideriamo una palla chiusa B_E in E . Poichè E è riflessivo allora B_E è debolmente compatta. Ora $B_E \cap M$ è una palla chiusa in M e risulta debolmente compatta in M . Ne consegue che $M = T(W^{m,p}(\Omega))$ è riflessivo per il teorema di Kakutani, e di conseguenza anche $W^{m,p}(\Omega)$ lo è.

3. Mostriamo che $W^{m,p}(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < +\infty$. Poichè $L^p(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < +\infty$ allora anche $E = L^p(\Omega)^N$ è separabile. Introduciamo l'operatore T definito come al punto precedente; allora $T(W^{m,p}(\Omega))$ è separabile e di conseguenza anche $W^{m,p}(\Omega)$ lo è (vedi ad esempio Adams [1], Theorem 1.21, che avrebbe potuto essere usato anche al punto precedente). \square

Osservazione 8.2 In particolare $W^{m,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{W^{m,2}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D_\alpha u, D_\alpha v \rangle_{L^2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D_\alpha u D_\alpha v \, dx.$$

Dualità

Ricordiamo che, se $1 \leq p < +\infty$, le funzioni di L^p si possono approssimare con funzioni C_c^∞ . In $W^{m,p}$ con $m > 0$ questa cosa risulta generalmente impossibile. Per rendersene conto basta cercare di approssimare una funzione costante diversa da zero nel caso $n = m = p = 1$.

Indichiamo con $W_0^{m,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ con la topologia della norma. Scriveremo anche

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Si ha che $(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ è completo, e quindi di Banach, in quanto è un sottospazio chiuso dello spazio completo $W^{m,p}(\Omega)$. I due spazi coincidono se $p < \infty$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ oppure $m = 0$.

Osservazione 8.3 Ricordiamo che se $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ allora $D_\alpha v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, cioè

$$D_\alpha v : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare e continua quando su C_c^∞ si considera la topologia di \mathcal{D} . Considerato che $C_c^\infty \subset W_0^{m,p}$ allora in C_c^∞ si può considerare la topologia indotta da $W_0^{m,p}$ rispetto

alla quale $D_\alpha v$ è continua se $v \in L^{p'}$ e $|\alpha| \leq m$. Infatti, presa $\varphi_j \in C_c^\infty$, $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $W_0^{m,p}$, si ha

$$\langle D_\alpha v, \varphi_j \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle v, D_\alpha \varphi_j \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle v, D_\alpha \varphi \rangle = \langle D_\alpha v, \varphi \rangle,$$

dal momento che se $|\alpha| \leq m$ allora la convergenza in $W_0^{m,p}$ implica che $D_\alpha \varphi_j \rightarrow D_\alpha \varphi$ in L^p e la convergenza forte implica la debole.

Supponiamo da ora in poi, che $v \in L^{p'}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$. Per il teorema di Hahn-Banach, allora, la distribuzione $D_\alpha v$ si può estendere ad una funzione lineare e continua su $W_0^{m,p}$ con la topologia della norma. Inoltre l'estensione è unica per la densità di C_c^∞ in $W_0^{m,p}$. Infatti, indicate con T_1 e T_2 due possibili estensioni e presa $u \in W_0^{m,p}$ allora esiste una successione $\psi_j \in \mathcal{D}$ tale che $\|\psi_j - u\|_{m,p} \rightarrow 0$. Inoltre per ogni j si ha $T_1(\psi_j) = T_2(\psi_j) = \langle D_\alpha v, \psi_j \rangle$ e passando al limite per $j \rightarrow \infty$ si ottiene, per unicità del limite, che $T_1(u) = T_2(u)$.

Ne consegue che $D_\alpha v$ individua univocamente un elemento di $W_0^{m,p}(\Omega)^*$. Trattandosi di uno spazio vettoriale, sono elementi di $W_0^{m,p}(\Omega)^*$ anche tutte le distribuzioni della forma

$$w = \sum_{|\alpha| \leq m} D_\alpha v_\alpha, \quad v_\alpha \in L^{p'}(\Omega).$$

In effetti si potrebbe dimostrare che tutti gli elementi di $W_0^{m,p}(\Omega)^*$ si possono scrivere in questo modo (Adams [1], Theorem 3.8 e osservazione 3.9).

Per quanto ora osservato, denotiamo con $W^{-m,p'}(\Omega)$ lo spazio duale di $W_0^{m,p}(\Omega)$, e vale la seguente caratterizzazione

$$w \in W^{-m,p'}(\Omega) \iff w = \sum_{|\alpha| \leq m} D_\alpha v_\alpha \text{ con } v_\alpha \in L^{p'}(\Omega).$$

Si osservi inoltre che per avere l'unicità dell'estensione è stata usata la densità di C_c^∞ che sussiste in $W_0^{m,p}(\Omega)$ ma non in $W^{m,p}(\Omega)$, a meno che i due spazi non coincidano. Ne consegue che, in generale, non ci si può aspettare che il duale di $W^{m,p}(\Omega)$, che è incluso in $W^{-m,p'}(\Omega)$, ammetta una caratterizzazione altrettanto semplice nel caso in cui $W_0^{m,p}(\Omega)$ sia un sottospazio proprio di $W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{-m,p'}(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo e separabile se $1 < p < \infty$ e la norma risulta

$$\|w\|_{-m,p'} = \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|v_\alpha\|_{p'} : v_\alpha \in L^{p'} \text{ e } w = \sum_{|\alpha| \leq m} D_\alpha v_\alpha \right\}$$

Approssimazione con funzioni regolari

Vale il seguente teorema di approssimazione; per la dimostrazione si può vedere Adams [1], Theorem 3.16.

Teorema 8.4 (di Meyers-Serrin ($H = W$)) *Sia $1 \leq p < +\infty$. Per ogni $u \in W^{m,p}(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $u_h \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\|u - u_h\|_{m,p} \rightarrow 0$ per $h \rightarrow +\infty$.*

Dal teorema segue che la chiusura dell'insieme $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ in $W^{m,p}(\Omega)$ è tutto lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$. In altri termini, le funzioni C^∞ sono dense in $W^{m,p}$. Il teorema di Meyers-Serrin è del 1964. Prima di allora questo risultato di chiusura non era noto e quindi si usava un altro simbolo, $H^{m,p}(\Omega)$, per indicare il completamento di $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$. Il teorema afferma quindi che $H = W$ (questo è anche il titolo che gli autori hanno dato all'articolo in cui pubblicarono il risultato, [9]).

Osservazione 8.5 Notiamo che il teorema $H = W$ non vale per $p = \infty$. Infatti la funzione $|x|$ appartiene a $W^{1,\infty}(-1, 1)$ ma non può essere approssimata da funzioni regolari nella norma di $W^{1,\infty}(-1, 1)$.

Aperti regolari e teoremi di immersione

Altre proprietà di approssimazione e di immersione valgono solo nel caso in cui l'aperto Ω e la sua frontiera $\partial\Omega$ soddisfano ad opportune proprietà di regolarità.

Definizione 8.6 Si dice che Ω ha frontiera localmente lipschitziana se la frontiera $\partial\Omega$ è localmente grafico di una funzione lipschitziana, cioè se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno $U_x \in \mathcal{U}_x$ tale che $\partial\Omega \cap U_x$ è grafico di una funzione lipschitziana.

Enunciamo il seguente teorema di immersione di Sobolev supponendo che Ω sia limitato. Questa ipotesi non è essenziale e si può rimuovere a costo di rafforzare l'ipotesi di regolarità sostituendola con la cosiddetta *proprietà di lipschitzianità locale forte* la cui formulazione però risulta molto più complicata (cfr. ad esempio [1], 4.5). Per semplicità consideriamo inoltre solamente il caso $m = 1$. Rinviamo ad Adams [1] e Brezis [3] per gli analoghi teoremi nel caso $m > 1$.

Con il termine *immersione* si intende un'applicazione di inclusione continua. Un'immersione si dice *compatta* se mappa insiemi limitati in relativamente compatti (in termini di successioni significa che da ogni successione limitata nel dominio è possibile estrarre una sottosuccessione convergente nel codominio).

Teorema 8.7 (Sobolev e Rellich) Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n con $\partial\Omega$ localmente lipschitziana se $n > 1$ oppure un intervallo nel caso $n = 1$.

Valgono le seguenti immersioni:

1. se $p < n$ allora $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \leq \frac{np}{n-p}$ e l'immersione è compatta se $q < \frac{np}{n-p}$;
2. se $p = n$ allora $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q < \infty$ e l'immersione è compatta;
3. se $p > n$ allora $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ e l'immersione è compatta.

Osservazione 8.8 L'immersione in 3 va intesa nel senso dell'esistenza di un rappresentante $C(\bar{\Omega})$ nella classe di equivalenza di $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Essa può essere migliorata nel senso che lo spazio $C(\bar{\Omega})$ può essere sostituito da spazi di funzioni hölderiane.

Osservazione 8.9 Se al posto di $W^{1,p}(\Omega)$ si considera $W_0^{1,p}(\Omega)$ si può togliere l'ipotesi $\partial\Omega$ lipschitziana.

Osservazione 8.10 Nella 1 si ha sempre $p^* := \frac{np}{n-p} > p$. p^* è detto *esponente di Sobolev*.

Osservazione 8.11 La continuità delle immersioni si traduce nelle seguenti relazioni tra le norme

- nei casi 1 e 2: $\|u\|_q \leq C\|u\|_{1,p}$,
- nel caso 3: $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{1,p}$.

per opportune costanti C .

Il caso della dimensione 1

Nel caso $n = 1$ ed in particolare se $\Omega = I$ è un intervallo, allora dalla 3 si ha che

1. se $p = 1$ allora $W^{1,1}(I) \rightarrow L^q(I)$ per ogni $q < \infty$ e l'immersione è compatta;
2. se $p > 1$ allora $W^{1,p}(I) \rightarrow C(\bar{I})$ e l'immersione è compatta.

Nel caso 1-dimensionale, vale in più la seguente ulteriore importante proprietà.

Teorema 8.12 *Sussiste la seguente immersione (non compatta)*

$$W^{1,1}(I) \rightarrow C(\bar{I})$$

nel senso che per ogni $u \in W^{1,1}(I)$ esiste una funzione (unica) $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tale che $\tilde{u} = u$ q.o. su I . Vale inoltre la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y \tilde{u}'(t) dt.$$

Osservazione 8.13 In particolare si ha che u è limitata e

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{1,1}.$$

Riferimenti bibliografici

- [1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
- [4] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the Calculus of Variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

- [5] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.
- [6] G. Dal Maso, *An introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [7] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.
- [8] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.
- [9] N. Meyers and J. Serrin, $H=w$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).
- [10] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.
- [11] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.
- [12] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.