

9 Nona lezione: Spazi di Sobolev (continuazione)

Alla dimostrazione del teorema 8.12 premetteremo un paio di lemmi. Cominciamo con l'osservare che esistono funzioni $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ tali che

- A) f è derivabile quasi ovunque con derivata nulla;
- B) $f' \neq 0$ in $\mathcal{D}'(I)$.

Tra gli esempi più semplici vi sono le funzioni costanti a tratti non costanti. In particolare A) non implica che $f = \text{costante}$ quasi ovunque, come invece accadrebbe se f fosse derivabile in ogni punto di I e non solo quasi ovunque. Il seguente lemma mostra che, viceversa, se $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ e $f' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$ allora f è costante quasi ovunque.

Lemma 9.1 *Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ tale che $f' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$. Allora esiste una costante C tale che $f = C$ quasi ovunque in I .*

DIMOSTRAZIONE Poiché $f' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$ allora

$$\int_I f \varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Basta provare che esiste C tale che

$$\int_I (f - C) \psi = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Fissiamo una funzione $w \in \mathcal{D}(I)$ tale che $\int_I w = 1$. Per ogni $\psi \in \mathcal{D}(I)$ sia

$$h := \psi - \left(\int_I \psi \right) w.$$

Chiaramente si ha $h \in \mathcal{D}(I)$ e $\int_I h = 0$. Allora esiste $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ tale che $\varphi' = h$ (basta prendere la funzione integrale con primo estremo di integrazione coincidente con uno dei due estremi di I). Ne consegue che

$$0 = \int_I f h = \int_I f \left[\psi - \left(\int_I \psi \right) w \right] = \int_I [f - \left(\int_I f w \right)] \psi.$$

Poiché quest'ultima vale per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ segue la tesi con $C = \int_I f w$. □

Quando la derivabilità è intesa in senso distribuzionale il teorema fondamentale del calcolo integrale, che vale classicamente per le funzioni continue, si generalizza alle funzioni L^1_{loc} come stabilito dal seguente lemma, che si applica ad esempio anche alla funzione segno (che mostra che la continuità è essenziale quando la derivabilità è classica).

Lemma 9.2 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Fissato $x_0 \in I$ consideriamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Allora $F \in C(I)$ ($F \in C(\bar{I})$ se $f \in L^1(I)$) e si ha $F' = f$ in $\mathcal{D}'(I)$.

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione della continuità di F è una semplice applicazione del teorema di Lebesgue della convergenza dominata.¹³ Proviamo la formula di derivazione. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, e supponendo che $I = (a, b)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle F', \varphi \rangle &= -\langle F, \varphi' \rangle = -\int_I F(x) \varphi'(x) dx = -\int_a^b \int_{x_0}^x f(t) dt \varphi'(x) dx \\ &= +\int_a^{x_0} \int_x^{x_0} f(t) dt \varphi'(x) dx - \int_{x_0}^b \int_{x_0}^x f(t) dt \varphi'(x) dx \\ &= +\int_a^{x_0} \int_a^t \varphi'(x) dx f(t) dt - \int_{x_0}^b \int_t^b \varphi'(x) dx f(t) dt \\ &= +\int_a^{x_0} \varphi(t) f(t) dt + \int_{x_0}^b \varphi(t) f(t) dt = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

dove l'ordine di derivazione è stato scambiato usando il teorema di Fubini. Segue la tesi. \square

Osservazione 9.4 Il teorema ora provato dice che la primitiva di una funzione $f \in L^p(I)$ è in $W^{1,p}(I)$ purché sia noto che $F \in L^p(I)$. Ciò accade sempre se I è limitato (per la disuguaglianza di Hölder¹⁴).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.12 Fissato $x_0 \in I$ poniamo

$$\bar{u}(x) = \int_{x_0}^x u'(t) dt.$$

Per il lemma 9.2 si ha $\bar{u} \in C(\bar{I})$ e $\bar{u}' = u'$ in $\mathcal{D}'(I)$, cioè $(\bar{u} - u)' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$, da cui, per il lemma 9.1 segue che $\bar{u} - u = C$ quasi ovunque e la tesi segue allora prendendo $\tilde{u} := \bar{u} - C$. \square

13

Teorema 9.3 (Lebesgue) Sia (f_h) una successione di funzioni integrabili su Ω e tali che

1. $\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x) = f(x)$ q.o. $x \in \Omega$,
2. $\exists \varphi \in L^1(\Omega)$ tale che $|f_h(x)| \leq \varphi(x)$ q.o. $x \in \Omega$.

Allora

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_E f_h(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

14

Teorema 9.5 Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $p, p' \in [1, +\infty]$ esponenti coniugati, allora $fg \in L^1(\Omega)$ e vale la disuguaglianza di Hölder $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Convergenza debole

Dalla caratterizzazione del duale di $W_0^{1,p}$ e dalla compattezza delle immersioni segue che la convergenza debole negli spazi $W^{1,p}$ è caratterizzabile nel modo seguente quando Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n con $\partial\Omega$ localmente lipschitziana se $n > 1$ oppure un intervallo nel caso $n = 1$

- caso $1 \leq p < \infty$: $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega) \iff u_n \rightarrow u$ e $Du_n \rightharpoonup Du$ in L^p ;
- caso $p = \infty$: $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,p}(\Omega) \iff u_n \rightarrow u$ e $Du_n \overset{*}{\rightharpoonup} Du$ in L^∞ .

Dimmostrarlo per esercizio nel caso $1 < p \leq \infty$.

Riferimenti bibliografici

- [1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
- [4] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.
- [5] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.
- [6] G. Dal Maso, *An introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [7] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.
- [8] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.
- [9] N. Meyers and J. Serrin, $H=w$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).
- [10] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.
- [11] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.
- [12] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.