12 Dodicesima lezione: Dimostrazione del teorema di De Giorgi e Ioffe

La prima dimostrazione del teorema 11.3 è stata data nel 1969 da Ennio De Giorgi[21] [8] nel caso in cui l'integrando $f(x, z, \xi)$ è continuo nella coppia delle variabili (z, ξ) (integrando di Carathéodory), ed esteso al caso più generale da Alexander D. Ioffe [14] nel 1977. La dimostrazione presentata qui, diversa dalle originali, è di De Giorgi, Buttazzo e Dal Maso [9, 4, 6].

L'idea è quella di esprimere la funzione f come estremo superiore di una famiglia numerabile di funzioni per le quali la semicontinuità inferiore sia facile da verificare. Ciò è garantito dal seguente lemma di approssimazione per funzioni convesse.

Lemma 12.1 *Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ un integrando normale convesso e supponiamo inoltre che f sia* superlineare *nella variabile ξ, uniformemente rispetto alle altre variabili, cioè che*

esista una funzione $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\theta(t)}{t} = +\infty \qquad \text{e} \qquad f(x, z, \xi) \geq \theta(|\xi|).$$

Allora

$$f(x, z, \xi) = \sup_{h\in\mathbb{N}} \{a_h(x, z) \cdot \xi + b_h(x, z)\}$$

con $a_h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ e $b_h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrandi di Carathéodory limitati.

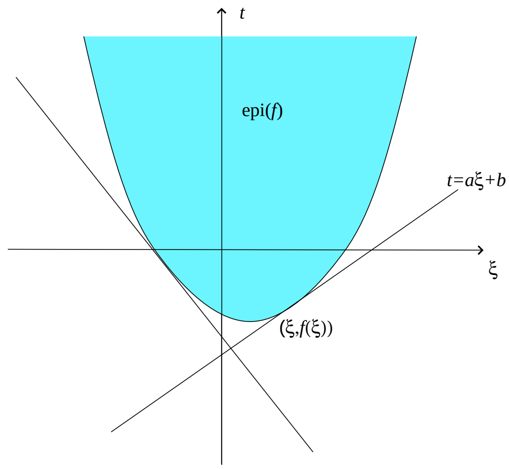
Per la dimostrazione del lemma, che è molto tecnica rimandiamo a Buttazzo [4] e Dal Maso [7]. Ci limitiamo qui ad osservare che la proprietà stabilita nel lemma è vera nel caso più semplice in cui f dipende solo da ξ e quindi $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty]$ è convessa e s.c.i.. Infatti, poiché f è convessa, il suo epigrafico

$$\mathrm{epi}(f) = \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \ : \ t \geq f(\xi)\}$$

è un insieme convesso (è un facile esercizio; cfr. [11], Proposition 2.1). Fissato un punto qualunque $(\xi, f(\xi))$ sul grafico di f, per il teorema di Hahn-Banach[22] c'è un iperpiano, di equazione $t = a \cdot \xi + b$, che separa punto ed epigrafico.

[21] Lecce 1928 - Pisa 1996. Fu uno dei maggiori matematici italiani della seconda metà del '900. Un'accurata biografia si trova all'indirizzo web http://cvgmt.sns.it

[22] Si usa qui il teorema di Hahn-Banach in una delle sue forme geometriche. Vedere ad esempio Brezis [3], Théorème I.6.



In altri termini, l'insieme

$$T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \ : \ f(\xi) \geq a \cdot \xi + b, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^k\}$$

è non vuoto e, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^k$, si ha

$$f(\xi) = \sup_{(a,b) \in T} (a \cdot \xi + b).$$

D'altra parte

$$\mathrm{epi}(f) = \mathbb{R}^{k+1} \setminus \bigcup_{(a,b) \in T} \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \ : \ t < a \cdot \xi + b\}$$

dove ciascuno degli insiemi di cui si fa l'unione è aperto. Siccome $\mathbb{R}^{k+1}$ ha base numerabile (cioè soddisfa il secondo assioma di numerabilità) allora, per il teorema di Lindelöf ([5], Capitolo terzo, Teorema 6.4) esiste una famiglia numerabile $(a_h, b_h)_{h \in \mathbb{N}}$ di elementi di T tale che

$$\mathrm{epi}(f) = \mathbb{R}^{k+1} \setminus \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \ : \ t < a_h \cdot \xi + b_h\},$$

cioè

$$f(\xi) = \sup\{a_h \cdot \xi + b_h \ : \ h \in \mathbb{N}\} \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Notiamo che non si è fatto uso della superlinearità di f.

Dimostrazione del teorema 11.3

Se si potesse scrivere

$$F(u,v) = \sup_{h \in \mathbb{N}} \int_\Omega \big(a_h(x, u(x)) \cdot v(x) + b_h(x, u(x))\big)\, d\mu(x)$$

cioè se si potesse scambiare il sup con l'integrale, allora F risulterebbe semicontinuo inferiormente come estremo superiore di una successione di funzionali s.c.i. In realtà l'identità precedente non vale, ma si può sfruttare l'idea grazie al seguente lemma di localizzazione di De Giorgi, Buttazzo e Dal Maso.

Lemma 12.2 *Sia (g_h) una successione di funzioni di $L^1(\Omega)$ e sia $g = \sup_{h\in\mathbb{N}} g_h$. Allora*

$$\int_\Omega g\,d\mu = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(B_i^N)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i^N} g_i\,d\mu$$

dove il secondo estremo superiore è fatto sulle partizioni $(B_i^N) := \{B_i^N \,:\, i = 1,\dots,N\}$ di Ω costituite da N elementi della σ-algebra $\mathscr{F}$.

Dimostrazione Poiché $g \geq g_i$ per ogni i, la disuguaglianza

$$\int_\Omega g\,d\mu \geq \sup_N \sup_{(B_i^N)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i} g_i\,d\mu$$

è banale. Proviamo quella opposta. Sia $f_N = \max\{g_1,\dots,g_N\}$. La successione $(f_N)_N$ converge crescendo a g, ed il teorema di convergenza monotona[23] (Beppo-Levi) implica

$$\int_\Omega g\,d\mu = \sup_N \int_\Omega f_N\,d\mu.$$

Basterà quindi dimostrare che per ogni N

$$\int_\Omega f_N\,d\mu \leq \sup_{(B_i^N)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i} g_i\,d\mu \tag{12.1}$$

dove l'estremo superiore è fatto sulle partizioni finite (B_i^N) di Ω costituite da N elementi della σ-algebra $\mathscr{F}$. Ora, per la misurabilità delle g_h, è un semplice esercizio mostrare che esiste una partizione di questo tipo tale che $f_N = g_i$ μ-q.o. su B_i per ogni $i = 1,\dots,N$.[24] Segue la (12.1). □

Applicando il lemma alle funzioni $g_h(x) := a_h(x,u(x))\cdot v(x) + b_h(x,u(x))$ si ottiene per F la rappresentazione

$$F(u,v) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{(B_i)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i} \big(a_h(x,u(x))\cdot v(x) + b_h(x,u(x)\big)\,d\mu(x). \tag{12.2}$$

L'applicazione del lemma è però subordinata alla verifica dell'ipotesi $g_h \in L^1(\Omega)$. Poiché le g_h sono limitate (per la limitatezza di a_h e b_h) è sufficiente mostrare che le g_h sono misurabili e questo segue dal fatto che a_h e b_h sono di Carathéodory.[25]

[23] Vedere ad esempio [18], Teorema 1.26 o [12], Capitolo sesto, Teorema 4.1.

[24] Infatti gli insiemi $D_i^N = \{x \in \Omega \,:\, f_N(x) = g_i(x)\}$, $i = 1,\dots,N$, sono misurabili, ma in generale non disgiunti; basta allora definire $B_1^N = D_1^N$, $B_2^N = D_2^N \setminus B_1^N$, $B_3^N = D_3^N \setminus (B_1^N \cup B_2^N)$ e così via.

[25] In generale, se $a : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è di Carathéodory e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è misurabile allora la funzione composta $x \mapsto a(x,u(x))$ risulta misurabile. Infatti è facile verificare che ciò è vero se u è una funzione semplice, cioè combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi misurabili di Ω. Se u è misurabile, è ben noto (Rudin [18], Teorema 1.17 applicato alla parte positiva e alla parte negativa di u) che esiste una successione u_n di funzioni semplici che converge a u quasi ovunque. Per la continuità di a rispetto alla seconda variabile si allora che $a(x,u_n(x)) \to a(x,u(x))$ quasi ovunque e la tesi segue dal fatto che il limite quasi ovunque di una successione di funzioni misurabili è misurabile.

Dunque F ammette la rappresentazione (12.2). A questo punto è sufficiente mostrare che se $a(x,z)$ e $b(x,z)$ sono integrandi di Carathéodory limitati su $\Omega\times\mathbb{R}^m$ ed E è un sottoinsieme misurabile di Ω, allora il funzionale

$$G(u,v)=\int_E \big(a(x,u(x))\cdot v(x)+b(x,u(x)\big)\,d\mu(x)$$

è seq. s.c.i. rispetto alla convergenza forte $L^1(E;\mathbb{R}^m)$ di u e debole $L^1(E;\mathbb{R}^k)$ di v.

Siano $u_j\to u$ in $L^1(E;\mathbb{R}^m)$ e $v_j\rightharpoonup v$ in $L^1(E;\mathbb{R}^k)$. Allora esiste una sottosuccessione u_{j_ν} che converge quasi ovunque e, per il teorema della convergenza dominata si ha

$$\int_E b(x,u(x))\,d\mu(x)=\lim_{\nu\to\infty}\int_E b(x,u_{j_\nu}(x))\,d\mu(x).$$

Poiché ciò vale non solo per (u_j) ma per qualunque sua sottosuccessione ne consegue che (esercizio)

$$\lim_{j\to\infty}\int_E b(x,u_j(x))\,d\mu(x)=\int_E b(x,u(x))\,d\mu(x).$$

Per dimostrare che anche

$$\lim_{j\to\infty}\int_E a(x,u_j(x))\cdot v_j(x)\,d\mu(x)=\int_E a(x,u(x))\cdot v(x)\,d\mu(x)$$

e concludere quindi che G è addirittura continuo, osserviamo che per poter passare al limite nel prodotto avendo v_j convergente debolmente in L^1 occorrerebbe che la successione $g_j(x)=a(x,u_j(x))$ convergesse fortemente in L^∞ (cioè uniformemente), ma poiché u_j converge solo in L^1 questo in generale non accade. In effetti, tuttavia, per passare al limite basta che $g_j\to g$ *quasi uniformemente* in E, cioè che per ogni $\varepsilon>0$ esista un misurabile $A_\varepsilon\subseteq E$ tale che $\mu(A_\varepsilon)<\varepsilon$ e $g_j\to g$ uniformemente in $E\setminus A_\varepsilon$.

La convergenza quasi-uniforme, nel nostro caso, è garantita dal seguente teorema.

Teorema 12.3 (Severini-Egorov) *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^k$ con $\mu(E)<\infty$. Sia (g_j) una successione di funzioni misurabili e finite quasi-ovunque su E. Se g_j converge quasi ovunque in E ad una funzione misurabile e finita g, allora $g_j\to g$ quasi-uniformemente.*

Vale dunque il seguente lemma.

Lemma 12.4 *Siano (g_j) una successione limitata in $L^\infty(E;\mathbb{R}^k)$ e (v_j) successione in $L^1(E;\mathbb{R}^k)$ tali che*

$g_j\to g$ quasi ovunque in E;

$v_j\rightharpoonup v$ in $L^1(E;\mathbb{R}^k)$.

Allora

$$\int_E g\cdot v\,d\mu=\lim_{j\to\infty}\int_E g_j\cdot v_j\,d\mu.$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo rimuovere l'ipotesi di superlinerità di f in ξ. Fissiamo due successioni $u_j \to u$ in L^1 e $v_j \rightharpoonup v$ in L^1. La (v_j) costituisce un sottoinsieme relativamente debolmente compatto in L^1 e quindi soddisfa la condizione di De la Vallée - Poussin, cioè esiste una $\theta : [0, \infty] \to [0, \infty]$ superlineare e convessa tale che

$$\sup_j \int_\Omega \theta(|v_j|)\, d\mu \leq 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$f(x, z, \xi) + \varepsilon\theta(|\xi|)$$

soddisfa tutte le condizioni del teorema compresa la superlinearità. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x, u, v)\, d\mu &\leq \int_\Omega f(x, u, v)\, d\mu + \varepsilon \int_\Omega \theta(|v|)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \Big(\int_\Omega f(x, u_j, v_j)\, d\mu + \varepsilon \int_\Omega \theta(|v_j|)\, d\mu \Big) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f(x, u_j, v_j)\, d\mu + \varepsilon
\end{aligned}$$

e la tesi si ottiene allora facendo tendere ε a zero. Il teorema è così completamente dimostrato. □

Riferimenti bibliografici

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[4] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[5] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[6] G. Dal Maso, *An introduction to Γ-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[7] G. Dal Maso, *Problemi di semicontinuità e rilassamento nel calcolo delle variazioni*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana **39** (1995), 145–196.

[8] E. De Giorgi, *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Lezioni tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, a.a. **1**968-69 Roma, 1969.

[9] E. De Giorgi, G. Buttazzo, and G. Dal Maso, *On the lower semicontinuity of certain integral functionals*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **74** (1983), no. 5, 274–282.

[10] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.

[11] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1976.

[12] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[13] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Springer, Berlin, 1992.

[14] A.D. Ioffe, *On lower semicontinuity of integral functionals i, ii*, SIAM J. Control Optim. **15** (1977), 521–538, 991–1000.

[15] N. Meyers and J. Serrin, *H=W*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).

[16] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.

[17] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.

[18] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.

[19] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.

[20] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.