10 Decima lezione: Spazi di Sobolev, traccia e disuguaglianze di Poincaré

Traccia sul bordo

Consideriamo il semispazio $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ : \ x_n \geq 0\}$. La sua frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ è l'iperpiano di $\mathbb{R}^n$ di equazione $x_n = 0$, che nel seguito identificheremo con $\mathbb{R}^{n-1}$.

Lemma 10.1 *L'applicazione*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : C^1_c(\mathbb{R}^n) & \to & L^p(\Gamma) \\ u & \mapsto & \gamma(u) = u_{|\Gamma}(x') = u(x', 0) \end{array}$$

è lineare e continua rispetto a$\|\cdot\|_{1,p}$ *in* $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ *e a* $\|\cdot\|_p$ *in* $L^p(\Gamma)$.

Dimostrazione La linearità è banale. Per provare la continuità dobbiamo mostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che $\|u_{|\Gamma}\|_p \leq C\|u\|_{1,p}$ per ogni $u \in L^p(\Gamma)$. Osserviamo a tal scopo che

$$\|u_{|\Gamma}\|_p = \Big(\int_\Gamma |u(x', 0)|^p \, dx'\Big)^{1/p}.$$

Osserviamo poi che, poichè la funzione $G(t) := |t|^{p-1}t$ è derivabile in ogni punto con derivata $G'(t) = p|t|^{p-1}$ (a differenza di $|t|^p$ che può non essere derivabile in 0) allora

$$\begin{aligned} |u(x',0)|^{p-1}u(x',0) &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\big[|u(x',s)|^{p-1}u(x',s)\big]\, ds = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}G\big(u(x',s)\big)\, ds \\ &= -\int_0^\infty G'\big(u(x',s)\big)\frac{\partial u}{\partial s}(x',s)\, ds = -\int_0^\infty p\big|u(x',s)\big|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial s}(x',s)\, ds. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} |u(x',0)|^p &= \big||u(x',0)|^{p-1}u(x',0)\big| \leq p\int_0^\infty \big|u(x',s)\big|^{p-1}\Big|\frac{\partial u}{\partial s}(x',s)\Big|\, ds \leq \\ &\leq C\Big[\int_0^\infty \big|u(x',s)\big|^p\, ds + \int_0^\infty \Big|\frac{\partial u}{\partial s}(x',s)\Big|^p\Big]\, ds. \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio è stata usata la disuguaglianza di Young

$$ab \leq \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^p}{p}$$

che vale per ogni $a, b \geq 0$ e $p, p' \in (1, +\infty)$ esponenti coniugati. La tesi segue integrando ambo i membri in x' su $\mathbb{R}^{n-1}$. □

Per il lemma, il teorema di Hahn-Banach e la densità di $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, l'applicazione γ si prolunga in modo unico ad un operatore lineare e continuo

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$$

detto *traccia* di u su Γ e denotato col simbolo $u_{|\Gamma}$. Per la continuità esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u_{|\Gamma}\|_p \leq C\|u\|_{1,p} \quad \text{per ogni } u \in L^p(\Gamma),$$

detta *disuguaglianza di traccia*.

Osservazione 10.2 Osserviamo che lo stesso ragionamento non funziona sostituendo la norma p a quella $(1,p)$, perchè non si riesce a controllare la norma della derivata di u con la norma p di u. Una differenza fondamentale tra $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$ è che in $L^p(\Omega)$ non ha senso parlare di traccia su $\partial\Omega$.

Possiamo immaginare ora come si potrebbe definire la traccia su $\Gamma = \partial\Omega$ di una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ quando Ω è un aperto "abbastanza regolare" di $\mathbb{R}^n$, ad esempio una varietà di classe C^1, servendosi di un'atlante di carte locali. In tal caso $u_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)$ dove la misura su Γ è quella indotta dalla struttura di varietà o elementarmente definita (misura superficiale $d\sigma$) su Γ, ovvero la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale ($\mathscr{H}^{n-1}$).

L'operatore di traccia γ non è suriettivo, cioè $\gamma(W^{1,p}(\Omega)) \subset L^p(\Gamma)$ e l'inclusione è stretta. Per descriverne l'immagine occorre introdurre spazi di Sobolev con indice di derivazione frazionario. Tra i vari modi di farlo vi è il seguente (cfr. Brezis [3], Commentaires sur le chapitre IX, 6). Per $p \in [1,\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in (0,1)$ si definisce

$$W^{m+\sigma,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) \ : \ \frac{|D_\alpha u(x) - D_\alpha u(y)|}{|x-y|^{\sigma+\frac{n}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \ \forall |\alpha| = m\}$$

con la norma

$$\|u\|_{m+\sigma,p} = \Big(\|u\|_{m,p}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega\int_\Omega \frac{|D_\alpha u(x) - D_\alpha u(y)|}{|x-y|^{\sigma+\frac{n}{p}}}\, dxdy\Big)^{1/p}.$$

Se Ω è limitato e con frontiera localmente lipschitziana, allora l'operatore

$$\begin{array}{rcl} \gamma : W^{1,p}(\Omega) & \to & W^{1-1/p,p}(\Gamma) \\ u & \mapsto & u_{|\Gamma} \end{array}$$

è lineare, continuo e suriettivo (cfr. Nečas [11], Théoreme 5.7); il suo nucleo è $W_0^{1,p}(\Omega)$;

Valgono inoltre le formule di Green ([11], Théoreme 1.1)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, dx = \int_\Gamma u\, v\, n_i\, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_\Omega u\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx \qquad \forall\, u, v \in W^{1,2}(\Omega),\ i = 1, \ldots, n$$

dove $\boldsymbol{n}$ denota il versore normale esterno a Γ, che per Γ localmente lipschitziana esiste $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ovunque ([11], Lemme 4.2);

Per funzioni $u, v \in W^{2,2}(\Omega)$ e Ω di classe C^1 vale la formula di Green

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\mathscr{H}^{n-1} - \int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, dx.$$

Quest'ultima formula ammette un'estensione agli aperti Ω poligonali (vedi Grisvard [9], 1.5.3).

Disuguaglianze di Poincaré

Trattiamo in questa sezione alcune disuguaglianze particolarmente utili nel Calcolo delle Variazioni.

Osserviamo anzitutto che il teorema 9.1 vale anche in dimensione maggiore di 1, ma naturalmente si dovrà supporre che il dominio sia un insieme connesso. Più precisamente vale il seguente teorema (vedi Ziemer [15], Corollary 2.1.9).

Teorema 10.3 *Sia Ω è un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(p \geq 1)$. Se $\nabla u = 0$ quasi ovunque in Ω, allora u è costante.*

Teorema 10.4 (disuguaglianza di Poincaré) *Sia Ω un insieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$ e $p \geq 1$. Esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione **Caso $n = 1$**. La dimostrazione è particolarmente semplice nel caso in cui $\Omega = (a, b)$ è un intervallo limitato. In tal caso infatti vale la formula fondamentale del calcolo integrale e si ha quindi (poiché $u(a) = 0$)

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \Big| \int_a^x u'(t)\, dt \Big| \leq \|u'\|_1,$$

cioè $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$ e la tesi segue dalla disuguaglianza di Hölder.
Caso generale. Nel caso di dimensione n qualunque si può procedere per assurdo. Supponiamo che la disuguaglianza non valga. Allora in particolare per ogni $C = j \in \mathbb{N}$ esiste $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$\|u_j\|_p > j\|\nabla u_j\|_p. \tag{10.1}$$

Non è restrittivo supporre che $\|u_j\|_{1,p} = 1$ per ogni j. Se infatti così non fosse basterebbe osservare che la (10.1) continua a valere per le funzioni $v_j = u_j/\|u\|_{1,p}$.

Ne consegue che esiste una sottosuccessione, che continuiamo a denotare con (u_j) tale che $u_j \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$, ovvero $u_j \to u$ in L^p e $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ in L^p. Dalla (10.1), d'altra parte, si ottiene che

$$\|\nabla u_j\|_p < \frac{\|u_j\|_p}{j} = \frac{1}{j} \to 0$$

e di qui che $\nabla u = 0$ (perchè $\|\nabla u\| \leq \liminf \|\nabla u_j\|$). Per il teorema 10.3 si ha che u è costante su ogni componente connessa di Ω, ma poiché u deve tendere a zero sul bordo di ciascuna di esse ne consegue che $u = 0$, ma ciò è in contraddizione col fatto che $1 = \|u\|_p$ (basta scrivere la norma $(1, p)$ di u_j e passare al limite). □

Osservazione 10.5 Come conseguenza della disuguaglianza di Poincaré, una norma equivalente in $W_0^{1,p}(\Omega)$ è data da $\left(\int_\Omega |Du|^p dx \right)^{1/p}$.

Analizzando la dimostrazione della disuguaglianza di Poincaré si vede che l'ipotesi che u abbia traccia nulla sul bordo si può indebolire richiedendo ad esempio che u abbia traccia nulla solamente su una parte della frontiera, purché essa sia "non trascurabile" e cioè abbia misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale diversa da zero e l'aperto Ω sia connesso. È altresì chiaro che se la si lascia cadere completamente il teorema non può valere (basta considerare il caso di una funzione costante non nulla). In tal caso vale però la seguente versione opportunamente modificata.

Teorema 10.6 *Sia Ω un insieme aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ con frontiera localmente lipschitziana. Allora esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dove $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u\, dx$.

Applicazioni a problemi di minimo

Esempio 10.7 Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo il classico problema di minimo per l'integrale di Dirichlet

$$\min \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega g(x) u\, dx \ : \ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\} \tag{10.2}$$

dove $g \in L^2(\Omega)$ è una funzione assegnata. Il funzionale da minimizzare rappresenta, per esempio, l'energia totale di un conduttore termico (o elettrico) omogeneo e isotropo che occupa la regione Ω dello spazio e sotto l'influenza di sorgenti di calore (o campi elettrici) distribuite.

Introduciamo il funzionale $F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega g(x) u\, dx.$$

Per provare l'esistenza del minimo con il metodo diretto cerchiamo una topologia su $W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

1. F sia sequenzialmente semicontinuo inferiormente,

2. F sia sequenzialmente coercivo.

Se scegliamo la topogia della norma incontriamo gli stessi problemi della dimensione 1: il funzionale è continuo ma non è coercivo.

Per la caratterizzazione della convergenza debole in $W_0^{1,2}$ F risulta sequenzialmente debolmente s.c.i. Per provare la coercività si può ricorrere alla disuguaglianza di Poincaré, per cui esiste una costante positiva C tale che, per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx;$$

utilizzando le disuguaglianze di Hölder e di Young si ha infatti, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
F(u) &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \|g\|_2 \|u\|_2 \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega g^2 dx \\
&\geq (1 - \frac{C\varepsilon}{2}) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega g^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{C}{2} \int_\Omega g^2 dx
\end{aligned}$$

avendo scelto nell'ultimo passaggio $\varepsilon = 1/c$. Poichè, per l'osservazione 10.5, il funzionale

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{c}{2} \int_\Omega g^2 dx$$

è sequenzialmente debolmente coercivo, allora tale risulta anche F e il teorema di Tonelli garantisce l'esistenza di almeno una soluzione del problema (10.2). La stretta convessità del funzionale ne garantisce infine l'unicità.

Esempio 10.8 Come prima, sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Nelle applicazioni fisico matematiche è più interessante il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u, \nabla u\rangle dx - \int_\Omega g(x)u\, dx$$

con cui è possibile rappresentare l'energia totale di un conduttore termico (o elettrico) che occupa la regione Ω dello spazio e sotto l'influenza di sorgenti di calore (o campi elettrici) distribuite, oppure quella di un corpo elastico lineare soggetto all'azione di forze esterne. Nel caso dei conduttori, la matrice $A(x)$ rappresenta la conduttività, che può variare da pounto a punto (conduttore non omogeneo e non isotropo).

Prescindendo dalla fisica del problema supponiamo che la matrice $A(x)$ sia limitata e definita positiva[15] ed indichiamo con $\lambda(x)$ il minimo autovalore (positivo). In conseguenza di tali ipotesi, per ogni vettore ξ si ha

$$\Lambda|\xi|^2 \geq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \lambda(x)|\xi|^2$$

per un'opportuna costante Λ. Per la seconda disuguaglianza si ha che

$$F(u) \geq \int_\Omega \lambda(x)|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega g(x)u\, dx.$$

Se inoltre $A(x)$ soddisfa la seguente condizione di *ellitticità uniforme*, cioè esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\lambda(x) \geq c > 0 \text{ per quasi ogni } x \in \Omega$$

[15] Come si vedrà, quest'ultima ipotesi non è soddisfatta nel caso dell'elasticità, mentre può esserlo nei problemi di conduzione.

(equivalente a dire che $1/\lambda(x) \in L^\infty(\Omega)$) allora

$$F(u) \geq c \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega g(x) u \, dx$$

e quindi F è sequenzialmente debolmente coercivo in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (perchè maggiora un funzionale coercivo). Inoltre, come prima, F è anche sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente in $W_0^{1,2}(\Omega)$ e pertanto il corrispondente problema di minimo ha soluzione in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

È interessante notare che se si chiede solo che $1/\lambda(x) \in L^1(\Omega)$ allora il funzionale non risulta debolmente coercivo in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (ad esempio $\lambda(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$ e $\Omega = (0,1)$). La coercività può essere in questo caso recuperata con un procedura cosiddetta di *rilassamento* che consiste in un'estensione a $+\infty$ del funzionale su uno spazio più grande di $W_0^{1,2}(\Omega)$ (ad esempio quello delle *funzioni a variazione limitata*) con un'opportuna topologia che garantisca la coercività. In questo modo si può però perdere la semicontinuità. Per la coercività, d'altra parte, le successioni minimizzanti sono relativamente compatte e la caratterizzazione dei punti limite delle sottosuccessioni convergenti può essere fatta allora considerando il più grande funzionale semicontinuo inferiormente minorante F, che risulterà ancora coercivo e i cui punti di minimo saranno punti di accumulazione delle successioni minimizzanti.

Riferimenti bibliografici

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[4] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the Calculus of Variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[5] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[6] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[7] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.

[8] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[9] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Springer, Berlin, 1992.

[10] N. Meyers and J. Serrin, *H=w*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).

[11] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.

[12] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.

[13] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.

[14] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.

[15] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.