Materiali iperelastici

Titolo nota 02/05/2006

I concetti presentati fino a questo punto sono comuni a tutti i corpi.
In generale corpi costituiti da materiali diversi si comportano in maniera diversa.
Questa diversità è specificata attraverso le <u>equazioni costitutive</u>, ovvero specificando un legame tra sforzo e deformazione.
Materiali diversi saranno caratterizzati da eq.ni costitutive diverse.

Sia $\Omega := \underline{K}(\mathcal{B})$.
Un materiale si dice iperelastico, rispetto alla configurazione $\underline{K}$, se esiste una funzione (regolare)

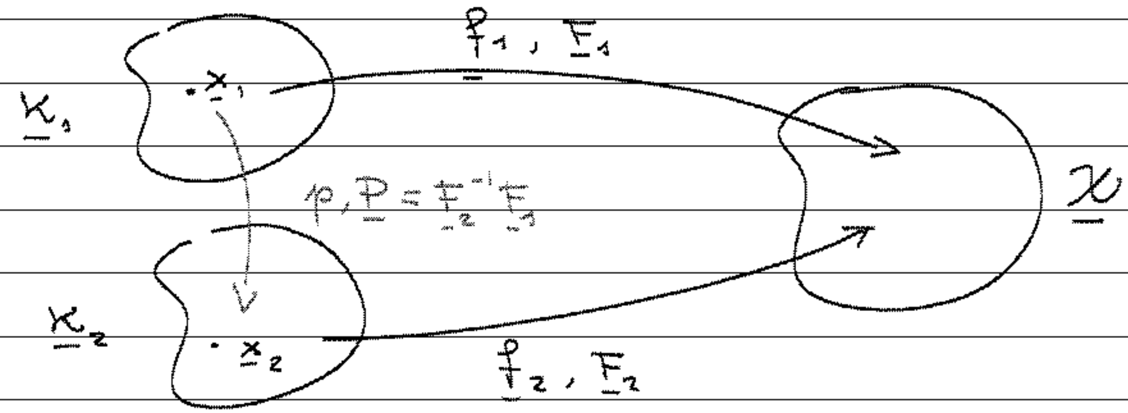
$$W : \Omega \times \mathrm{Lin}^+ \longrightarrow [0, +\infty]$$

tale che

$$\underline{\underline{S}}(\underline{x}) = D_{\underline{\underline{F}}} W(\underline{x}, \underline{\underline{F}}).$$

La f.ne W è chiamata densità di energia elastica (free energy o Helmholtz free energy).

Dimostriamo che se un materiale è iperelastico rispetto ad una configurazione $\underline{K}$ allora lo è rispetto a tutte le configurazioni.
Consideriamo quindi due configurazioni di riferimento $\underline{K}_1$ e $\underline{K}_2$.



si ha

$$\underline{S}_1 = (\det \underline{F}_1)\, \underline{T}\, \underline{F}_1^{-T}$$

$$\underline{S}_2 = \det \underline{F}_2\, \underline{T}\, \underline{F}_2^{-T} \Rightarrow \underline{T} = \det \underline{F}_2^{-1}\, \underline{S}_2\, \underline{F}_2^{T}$$

per cui

$$\underline{S}_1 = \det \underline{F}_1 \det \underline{F}_2^{-1}\, \underline{S}_2\, \underline{F}_2^{T}\, \underline{F}_1^{-T}$$

$$= \det (\underline{F}_2^{-1} \underline{F}_1)\, \underline{S}_2\, (\underline{F}_2^{-1} \underline{F}_1)^{-T}$$

$$= \det \underline{P}\, \underline{S}_2\, \underline{P}^{-T}$$

Supponiamo che il materiale sia iperelastico rispetto alla configurazione $\underline{K}_2$ e dimostriamo che lo è pure rispetto a $\underline{K}_1$.

Si ha $\underline{S}_2 = D_{\underline{F}_2} W_2(\underline{x}_2, \underline{F}_2)$

$$\text{Poniamo } \underline{W}_1(\underline{x}_1, \underline{F}_1) := \det \underline{P}\, W_2(\underbrace{p(\underline{x}_1)}_{x_2}, F_1 P^{-1}).$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial F_1}\right)_{ij} = \det \underline{P} \left(\frac{\partial W_2}{\partial F_2}(x_2, \underline{F}_2)\right)_{rs} \frac{\partial (F_1 P^{-1})_{rs}}{\partial (F_1)_{ij}}$$

$$= \det \underline{P} \left(D_{F_2} W_2\right)_{rs} \frac{\partial (F_1)_{rk} (P^{-1})_{ks}}{\partial (F_1)_{ij}}$$

$$= \det \underline{P} \left(D_{F_2} W_2\right)_{rs} \delta_{ir} \delta_{kj} (P^{-1})_{ks}$$

$$= \det \underline{P} \left(\underline{S}_2\right)_{is} P^{-1}_{js}$$

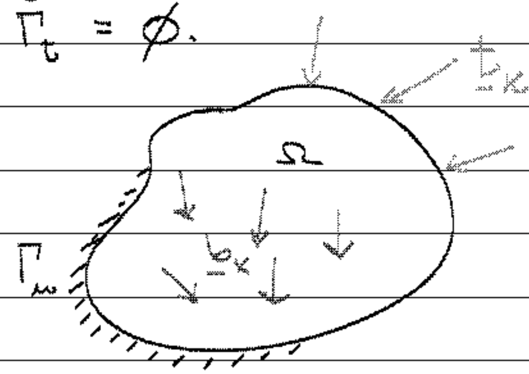
$$= \det \underline{P}\, \underline{S}_2\, \underline{P}^{-T} = \underline{S}_1$$

come volevasi dimostrare.

Se esiste una configurazione $\underline{K}$ rispetto alla quale la densità di energia è indipendente da $\underline{x}$, i.e., $W_\kappa(\underline{x},\underline{F}) = \tilde{W}_\kappa(F)$, diremo che il corpo è omogeneo

Equazioni di equilibrio

Consideriamo un corpo nella configurazione di riferimento $\underline{\kappa}$ e sia $\Omega = \underline{\kappa}(\Omega)$.
Sia $\partial\Omega$ la frontiera di Ω e $\Gamma_u, \Gamma_t \subset \partial\Omega$ tali che $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \partial\Omega$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$.



Immaginiamo che il corpo sia "bloccato" su Γ_u, ovvero
$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{x} \quad \forall\, \underline{x} \in \Gamma_u$

Supponiamo inoltre che ci siano forze di volume $\underline{b}_\kappa$ e forze superficiali $\underline{t}_\kappa$ applicate su Γ_t. Le eq.ni statiche d'equilibrio sono:

$$
\begin{cases}
\mathrm{Div}\, \underline{S} + \underline{b}_\kappa = \underline{0} & \text{in } \Omega \\
\underline{S}\, \underline{n}_\kappa = \underline{t}_\kappa & \text{su } \Gamma_t \\
\underline{S} = D_{\underline{F}} W(\cdot, F) & \text{in } \Omega \\
\underline{F} = \nabla \underline{f} & \text{in } \Omega \\
\underline{f}(\underline{x}) = \underline{x} & \text{su } \Gamma_u
\end{cases}
$$

Risolvere il problema precedente è formalmente equivalente a trovare i punti di stazionarietà del funzionale

$$I(\underline{\psi}) = \int_{\Omega} W(\underline{x}, \nabla\underline{\psi}(\underline{x}))\, dx - \int_{\Omega} \underline{b}_{\kappa} \cdot \underline{\psi} - \int_{\Gamma_t} \underline{t}_{\kappa} \cdot \underline{\psi}$$

definito sull'insieme

$$\mathcal{A} = \{ \underline{\psi} : \underline{\psi} \text{ "regolare" e } \underline{\psi} = \underline{0} \text{ su } \Gamma_u \}$$

<u>Nota</u> "formalmente" significa che è possibile fare i conti sottostanti.

Sia $\underline{f} \in \mathcal{A}$ un punto di stazionarietà di I.

Allora $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{I(\underline{f} + t\underline{\psi}) - I(\underline{f})}{t} = 0$

per ogni ψ regolare e $\underline{\psi} = \underline{0}$ su Γ_u, $(\underline{f} + t\underline{\psi} \in \mathcal{A})$.

Quindi

$$I(\underline{f}+t\underline{\psi}) - I(\underline{f}) = \int_{\Omega} W(x, \nabla(\underline{f}+t\psi)) - W(x, \nabla\underline{f})\, dx +$$

$$- t \left\{ \int_{\Omega} \underline{b}_{\kappa} \cdot \underline{\psi} - \int_{\Gamma_t} \underline{t}_{\kappa} \cdot \underline{\psi}\, da \right\}$$

$$I(\underline{f}+t\underline{\psi})-I(\underline{f}) = \int_\Omega t\, D_F W(\underline{x}, \nabla \underline{f}) \cdot \nabla \underline{\psi} + o(t)\, dx +$$

$$- t \left\{ \int_\Omega \underline{b}_\kappa \cdot \underline{\psi} - \int_{\Gamma_t} \underline{t}_\kappa \cdot \underline{\psi}\, da \right\}$$

Quindi

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{I(\underline{f}+t\underline{\psi})-I(\underline{f})}{t}$$

$$= \int_\Omega D_F W(x, \nabla \underline{f}) \cdot \nabla \underline{\psi}\, dx - \int_\Omega \underline{b}_\kappa \cdot \underline{\psi} - \int_{\Gamma_t} \underline{t}_\kappa \cdot \underline{\psi}\, da$$

$$= -\int_\Omega \operatorname{Div} D_F W(\underline{x}, \nabla \underline{f}) \cdot \psi + \int_{\partial\Omega} D_F W(\underline{x}, \nabla \underline{f})\, \underline{n}_\kappa \cdot \underline{\psi} +$$

$$- \int_\Omega \underline{b}_\kappa \cdot \underline{\psi} - \int_{\Gamma_t} \underline{t}_\kappa \cdot \underline{\psi}\, da$$

$$= -\int_\Omega \left(\operatorname{Div} D_F W(x, \nabla \underline{f}) + \underline{b}_\kappa\right) \cdot \underline{\psi}\, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_t} \left(D_F W(\underline{x}, \nabla \underline{f})\, \underline{n}_\kappa - \underline{t}_\kappa\right) \cdot \underline{\psi}\, da$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\underline{\psi} = 0$ su Γ_u.

Per cui

$$0 = -\int_\Omega \left(\mathrm{Div}\, D_F W(x, \nabla \underline{f}) + \underline{b}_\kappa \right) \cdot \underline{\psi}\, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_t} \left(D_F W(\underline{x}, \nabla \underline{f}) \, \underline{n}_\kappa - t_\kappa \right) \cdot \underline{\psi}\, da$$

$$\forall \psi \in \mathcal{A}$$

"eq. ne di Eulero - Lagrange"
"Teorema dei Lavori virtuali"

Prendendo $\psi = 0$ su $\partial\Omega$ si ha

$$\int_\Omega \mathrm{Div}\, D_F W(x, \nabla \underline{f}) + \underline{b}_\kappa) \cdot \underline{\psi}\, dx = 0 \quad \forall \underline{\psi} \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Div}\, D_F W(x, \nabla \underline{f}) + \underline{b}_\kappa = \underline{0} \qquad \forall x \in \Omega$$

Ponendo $\underline{S} = D_F W(x, \nabla \underline{f})$ si ha

$$\mathrm{Div}\, \underline{S} + \underline{b}_\kappa = 0$$

Quindi si ha

$$\int_{\Gamma} \left(D_F W(x, \nabla \underline{f})\, \underline{w}_K - \underline{t}_K \right) \cdot \underline{\psi} = 0 \quad \forall \underline{\psi} \in \mathcal{A}$$

$$\Updownarrow$$

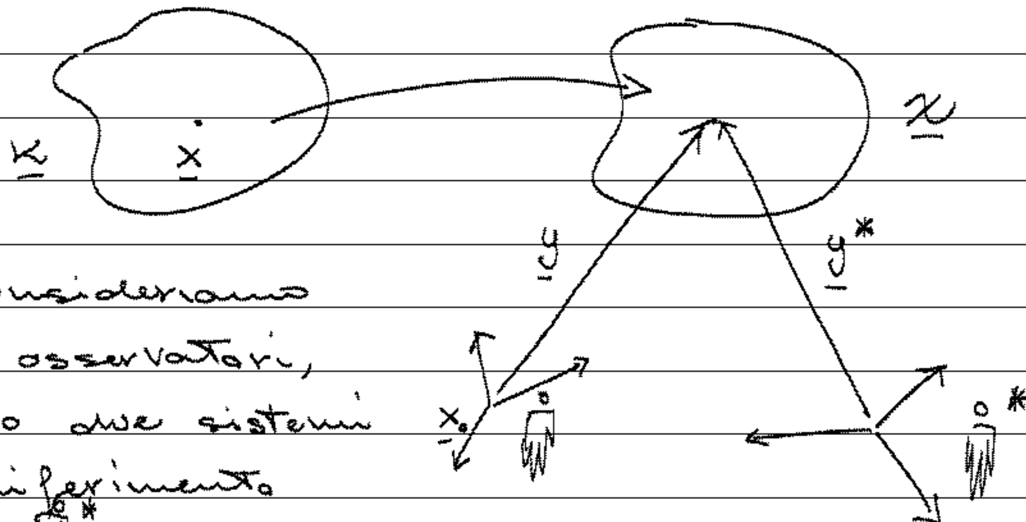
$$D_F W(x, \nabla \underline{f})\, \underline{w}_K = \underline{t}_K$$

ovvero $$\underline{S}\, \underline{w}_K = \underline{t}_K \qquad \#$$

La quantità $\underline{I}(\psi)$ è chiamata energia totale del corpo.

Obiettività (Material Frame Indifference)

Consideriamo la deformazione di un corpo.



e consideriamo due osservatori, ovvero due sistemi di riferimento $\mathring{W}$ e $\mathring{W}^*$.

L'osservatore $\mathring{W}$ rileverà una deformazione $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ e quindi un gradiente di deformazione $\underline{F} = \nabla \underline{f}$.

L'osservatore $\mathring{W}^*$, essendo traslato di $\underline{c}$, e ruotato di $\underline{Q}$, rispetto all'osservatore $\mathring{W}$, rileverà una deformazione pari a

$$y^* = \underline{f}^*(\underline{x}) = \underline{c} + \underline{Q}\,(\underline{y} - \underline{x}_0)$$

$$= \underline{c} + \underline{Q}\,(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{x}_0)$$

con $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\underline{Q} \in \mathrm{Orth}^+$.
Segue che

$$\underline{F}^* = \nabla \underline{f}^* = \underline{Q}\,\underline{F}$$

Sia $\psi(\underline{x})$ la densità d'energia del punto $\underline{x} \in \Omega$.

Allora si ha che

$$\underline{\psi}(\underline{x}) = \underline{W}(\underline{x}, \underline{F}(\underline{x})) \quad \text{per l'osservatore}$$

e

$$\underline{\psi}(\underline{x}) = \underline{W}^*(\underline{x}, \underline{F}^*(\underline{x})) \quad \text{per l'osservatore}\ ^*.$$

Il principio di obiettività afferma che l'eq.ne costitutiva (in questo caso la densità di energia) non dipende dal sistema di riferimento, cioè

$$W^*(\cdot\,,\cdot) = W(\cdot\,,\cdot)$$

Per cui deduciamo che

$$\psi(\underline{x}) = \mathbb{W}(\underline{x}, \underline{F}(\underline{x})) = \underline{\mathbb{W}}(\underline{x}, \underline{F}^*(x)) = \mathbb{W}(\underline{x}, \underline{Q}\underline{F}(\underline{x}))$$

Quindi M.F.I. è soddisfatta se e solo se

$$\boxed{\mathbb{W}(\cdot, \underline{F}) = \mathbb{W}(\cdot, \underline{Q}\underline{F}) \quad \forall \begin{array}{l} \underline{Q} \in Orth^+ \\ F \in Lin^+ \end{array}}$$

Si osservi che dato che $\underline{F} = \underline{R}\underline{U}$ si ha

$$\mathbb{W}(\cdot, \underline{F}) = \mathbb{W}(\cdot, \underline{R}\underline{U}) \overset{M.F.I.}{=} \mathbb{W}(\cdot, \underline{R}^T\underline{R}\underline{U}) = \mathbb{W}(\cdot, \underline{U})$$

per cui l'energia non dipende dalla rotazione.

Differenziando l'eq.ne

$$\mathbb{W}(\cdot, \underline{F}) = \mathbb{W}(\cdot, \underline{Q}\underline{F})$$

si ha

$$D_F \mathbb{W}(\cdot, \underline{F})\big]_{ij} = \partial_{F_{rs}} \mathbb{W}(\cdot, \underline{Q}\underline{F}) \frac{\partial Q_{rk} F_{ks}}{\partial F_{ij}}$$

$$= \partial_{F_{rs}} \mathbb{W}(\cdot, QF)\, Q_{ri}\, \delta_{js}$$

per cui

$$D_F \mathbb{W}(\cdot, F) = Q^T D_F \mathbb{W}(\cdot, QF)$$

Se indichiamo con

$$\underline{\mathcal{T}}(\underline{x}, \underline{F}) := D_F \mathbb{W}(\underline{x}, \underline{F})$$

si ha

$$\underline{S} = \underline{\mathcal{T}}(\underline{x}, \underline{F}) = \underline{Q}^T \underline{\mathcal{T}}(\underline{x}, \underline{Q}\underline{F}) \quad \forall \underline{Q} \in SO(3)$$

<u>Esercizio</u>

Dato $\underline{W} \in Skw$ verificare che

$$\underline{Q} = \underline{I} + \operatorname{sen}\omega\, \underline{W} + (1-\cos\omega)\underline{W}^2 \in Orth^+ \quad \forall \omega \in (0, \pi)$$

<u>Aiuto</u> $\underline{W}^3 = -\underline{W}$.

La implica che

$$D_{F}\underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F})\,\underline{W}\,\underline{F} = \underline{W}\,\underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) \qquad \forall \underline{W}\in Skw \quad \forall \underline{F}\in Lin^{+} \qquad \star$$

Dalla si ha

$$\underline{Q}\,\underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) = \underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{Q}\,\underline{F}) \qquad \forall \underline{Q}\in Orth^{+}$$

e dall'esercizio precedente si ha che

$$\underline{Q}_{\varepsilon} = \underline{I} + \operatorname{sen}\varepsilon\,\underline{W} + (1-\cos\varepsilon)\,\underline{W}^{2} \in Orth^{+} \qquad \forall \varepsilon\in(0,\pi) \quad \underline{W}\in Skw$$

per cui

$$Q_{\varepsilon}\,\underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) - \underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) = \underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{Q}_{\varepsilon}\underline{F}) - \underline{\mathcal{T}}(\underline{F})$$

dato che $\sin\omega = \varepsilon + O(\varepsilon^{2})$ e $1-\cos\omega = O(\varepsilon^{2})$ si ha

$$= \underline{Q}_{\varepsilon}\,\underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) - \underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) = \varepsilon\,\underline{W}\,\underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) + \underline{O}(\varepsilon^{2})$$

$$= \underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F} + \varepsilon\underline{W}\,\underline{F} + \underline{O}(\varepsilon)) - \underline{\mathcal{T}}(\cdot,\underline{F}) =$$

$$= \varepsilon\, D_{F}\,\mathcal{T}(\underline{F})\,\underline{W}\,\underline{F} + O(\varepsilon^{2})$$

dividendo per ε e passando al limite si ha $\star$.

Teoria infinitesima

$$W(\underline{x},\underline{F}) = W(\underline{x},\underline{I}+\varepsilon\underline{\tilde{H}})$$

Per semplicità di notazione sciveremo $W(\underline{F})$ al posto di $W(\underline{x},\underline{F})$.

$$W(\underline{I}+\varepsilon\underline{\tilde{H}}) = W(\underline{I}) + \varepsilon D_F W(\underline{I})\cdot\underline{\tilde{H}} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 D_F^2 W(I)\underline{H}\cdot\underline{H} + o(\varepsilon^2)$$

$$= W(I) + \underline{\mathcal{T}}(\underline{I})\cdot\underline{H} + \frac{1}{2} D_F \mathcal{T}(I)\,\underline{H}\cdot\underline{H} + o(\varepsilon^2)$$

Poniamo $\underline{\mathring{T}} := \underline{\mathcal{T}}(\underline{I})$. $\underline{\mathring{T}}$ é la tensione a deformazione nulla, ovvero nella configurazione di riferimento. Si osservi che

$$\underline{S} = \underline{\mathcal{T}}(\underline{F}) = \det \underline{F}\ \underline{T}\ \underline{F}^{-T}$$

e quindi

$$\underline{\mathring{T}} = \underline{\mathcal{T}}(\underline{I}) = T \in Sym.$$

Da ☆ della pagina precedente otteniamo

$$D_F \mathcal{T}(\underline{I})\,\underline{W} = \underline{W}\,\underline{\mathcal{T}}(\underline{I}) = \underline{W}\,\underline{\mathring{T}} \qquad (☆☆)$$

Per cui

$$\underline{W}(\underline{I}+\underline{H}) \simeq W(\underline{I}) + \mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2} D_F \mathcal{J}(\underline{I})[\underline{E}+\underline{W}]\cdot\underline{H}$$

$$= W(\underline{I}) + \mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\left(\underline{W}\mathring{\underline{T}} + D_F\mathcal{J}(\underline{I})\underline{E}\right)\cdot\underline{H}$$

$$= W(\underline{I}) + \mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{W}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2} D_F\mathcal{J}(\underline{I})\underline{H}\cdot\underline{E}$$

$$= W(\underline{I}) + \mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{W}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{W}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{E} + \frac{1}{2} D_F\mathcal{J}(\underline{I})\underline{E}\cdot\underline{E}$$

$$= W(\underline{I}) + \mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{H}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} - \frac{1}{2}\underline{E}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{E}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{W} + \frac{1}{2} D_2 W(\underline{I})\underline{E}\cdot\underline{E}$$

$$= W(\underline{I}) + \mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{H}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} - \frac{1}{2}\underline{E}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{E} + \frac{1}{2} D_2 W(\underline{I})\underline{E}\cdot\underline{E}$$

Poniamo

Tensore di elasticità incrementale

$$\underline{\mathbb{L}}\,\underline{E}\cdot\underline{E} := D_2 W(\underline{I})\underline{E}\cdot\underline{E} - \underline{E}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{E}$$

per cui

$$W(\underline{F}) = W(\underline{I}+\underline{H}) = W(\underline{I}) + \mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{H}\mathring{\underline{T}}\cdot\underline{H} + \frac{1}{2}\underline{\mathbb{L}}\,\underline{E}\cdot\underline{E}$$

Se $W(\underline{I}) = 0$ e $\overset{\circ}{\underline{T}} = D_F W(\underline{I}) = \underline{0}$

allora $W(\underline{F}) = W(\underline{I}+\underline{H}) = \frac{1}{2} \underline{\mathbb{L}} \underline{E} \cdot \underline{E}$

dove $\underline{\mathbb{L}} = D_2 W(\underline{I}) =: \underline{\mathbb{C}}$

Tensore di elasticità

Calcoliamo il tensore di P.-K.

$$\underline{S} = D_F W(\underline{F}) = D_H W(\underline{I}+\underline{H})$$

$$= \overset{\circ}{\underline{T}} + \underline{H}\overset{\circ}{\underline{T}} + \underline{\mathbb{L}}\,\underline{E}$$

$$\boxed{\underline{S} = \overset{\circ}{\underline{T}} + \underline{H}\overset{\circ}{\underline{T}} + \underline{\mathbb{L}}\,\underline{E}}$$

Elasticità lineare con tensione residua.

Se $\overset{\circ}{\underline{T}} = \underline{0}$ allora $\boxed{\underline{S} = \underline{\mathbb{L}}\,\underline{E}}$.

Calcoliamo il tensore di Cauchy nel caso $\overset{\circ}{\underline{T}} = \underline{0}$

$$\underline{T} = (\det \underline{F})^{-1}\, \underline{S}\, \underline{F}^T$$

$$= (1 + \varepsilon \operatorname{tr} \tilde{H} + o(\varepsilon))^{-1}\, \underline{\mathbb{L}}\, \underline{\tilde{E}}\, \varepsilon\, (\underline{I} + \varepsilon \tilde{H})^T$$

$$\underline{T} \overset{\sim}{=} \varepsilon \, \underline{\underline{L}} \, \underline{\tilde{E}} = \underline{\underline{L}} \, \underline{E} = \underline{S} \qquad \boxed{\underline{S} = \underline{T}}.$$

Quindi in elasticità lineare il tensore di P.-K. coincide con il tensore di Cauchy.

Calcoliamo ora $\underline{T}$ nel caso in cui $\underline{\mathring{T}} \neq \underline{0}$.

$$\underline{T} = \left(1 + \varepsilon \, \mathrm{tr} \, \underline{\tilde{H}} + o(\varepsilon)\right)^{-1} \left(\underline{\mathring{T}} + \varepsilon \, \underline{\tilde{H}} \, \underline{\mathring{T}} + \varepsilon \, \underline{\underline{L}} \, \underline{\tilde{E}}\right) \left(\underline{I} + \varepsilon \, \underline{\tilde{H}}\right)^{T}$$

$$= \left(1 - \varepsilon \, \mathrm{tr} \, \tilde{H} + o(\varepsilon)\right)^{-1} \left(\underline{\mathring{T}} + \varepsilon \, \tilde{H} \, \mathring{T} + \varepsilon \, \underline{\underline{L}} \, \underline{\tilde{E}}\right) \left(\underline{I} + \varepsilon \, \underline{\tilde{H}}^{T}\right)$$

$$\simeq \left(\underline{\mathring{T}} + \varepsilon \, \tilde{H} \, \mathring{T} + \varepsilon \, \underline{\underline{L}} \, \tilde{E} - \varepsilon \, \underline{\mathring{T}} \, \mathrm{tr} \, \underline{\tilde{H}}\right) \left(\underline{I} + \varepsilon \, \tilde{H}^{T}\right)$$

$$= \underline{\mathring{T}} + \varepsilon \, \tilde{H} \, \mathring{T} + \varepsilon \, \underline{\underline{L}} \, \underline{\tilde{E}} - \varepsilon \, \underline{\mathring{T}} \, \mathrm{tr} \, \underline{\tilde{H}} + \varepsilon \, \underline{\mathring{T}} \, \underline{\tilde{H}}^{T}$$

per cui

$$\underline{T} = \underline{\mathring{T}} \left(1 - \mathrm{tr} \, \underline{H}\right) + \underline{H} \, \underline{\mathring{T}} + \underline{\mathring{T}} \, \underline{H}^{T} + \underline{\underline{L}} \, \underline{E} \neq \underline{S}$$

Si osserva inoltre che se $\underline{\mathring{T}} \neq \underline{0}$ l'eq.ne costitutiva non dipende solo da $\underline{E}$ ma anche da $\underline{W}$ (ovvero $\underline{H}$).

Proprietà di simmetria di $\underline{\mathbb{C}}$

Riassumendo, nel caso $\dot{\underline{T}} = \underline{0}$ si ha

$$\underline{\mathbb{C}} = D_2 W = D_F \mathcal{F}$$

i.e.,
$$\mathbb{C}_{ijpq} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{pq}} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{pq} \partial F_{ij}} = \mathbb{C}_{pqij}$$

Inoltre dalla ☆☆ si ha

$$\underline{\mathbb{C}}\, \underline{W} = \underline{0} \qquad \forall\, \underline{W} \in \mathrm{Skw}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbb{C}_{ijpq} = \mathbb{C}_{ijqp}$$

Infine abbiamo che $\underline{S} = \underline{T} \in \mathrm{Sym}$, quindi

$$S_{ij} = T_{ij} = \mathbb{C}_{ijpq} E_{pq}$$
$$= T_{ji} = \mathbb{C}_{jipq} E_{pq} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{C}_{ijpq} = \mathbb{C}_{jipq}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\mathbb{C}_{ijpq} = \mathbb{C}_{pqij} = \mathbb{C}_{jipq}}$$