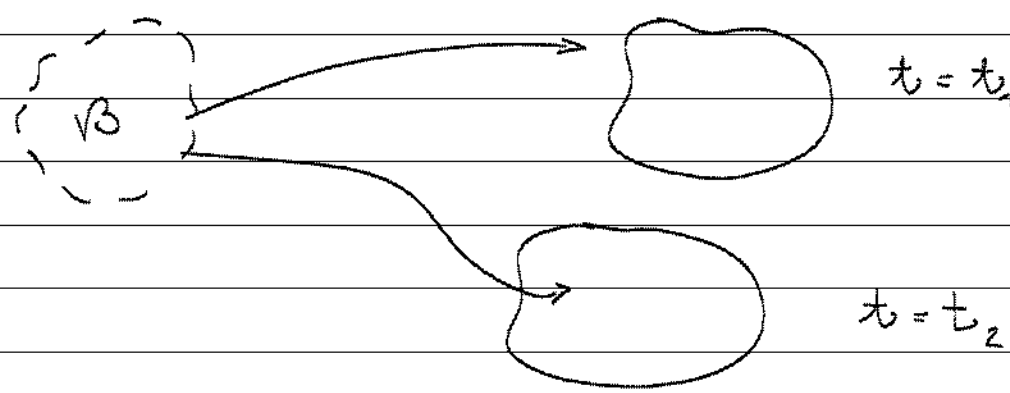
Cinematica dei continui

Titolo nota 29/04/2006

1. Corpi e deformazioni

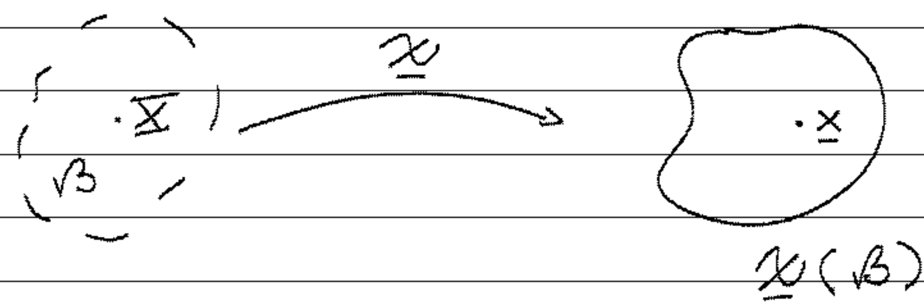
Non è banale dare una definizione di corpo. I "corpi" si presentano a noi occupando regioni dello spazio, lo stesso "corpo" può occupare, in istanti diversi, diverse regioni. Quindi ciò che noi vediamo non è il "corpo" ma i piazzamenti del corpo nello spazio.



È possibile dare una definizione di corpo (in maniera sbrigativa, è un insieme topologico con una struttura differenziabile), ma per i nostri scopi forse conviene riguardare il "corpo" come un concetto primitivo. I punti X del corpo $\mathcal{B}$ sono chiamati punti materiali.

<u>Definizione</u> Un <u>piazzamento</u> del corpo $\mathcal{B}$ è una funzione invertibile $\underline{\chi}$ che mappa i punti materiali $\underline{X}$ in punti dello spazio Euclideo tridimensionale.

$$\underline{\chi} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$$



D'ora in avanti assumeremo che le immagini dei piazzamenti, $\underline{\chi}(\mathcal{B})$, siano regioni regolari (Lipschitziane).
Inoltre dati due piazzamenti $\underline{\chi}_1$ e $\underline{\chi}_2$ assumeremo che la mappa

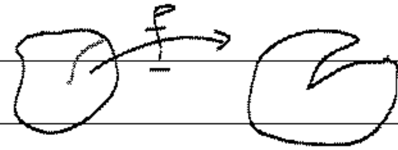
$$\underline{f} := \underline{\chi}_1 \circ \underline{\chi}_2^{-1}$$

è

1) Iniettiva (proibisce che due punti materiali diversi vengano mandati in un unico punto, i.e.,

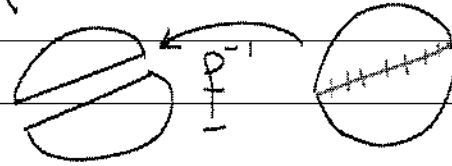
proibisce la compenetrazione)

2) continua (proibisce la rottura



NO!)

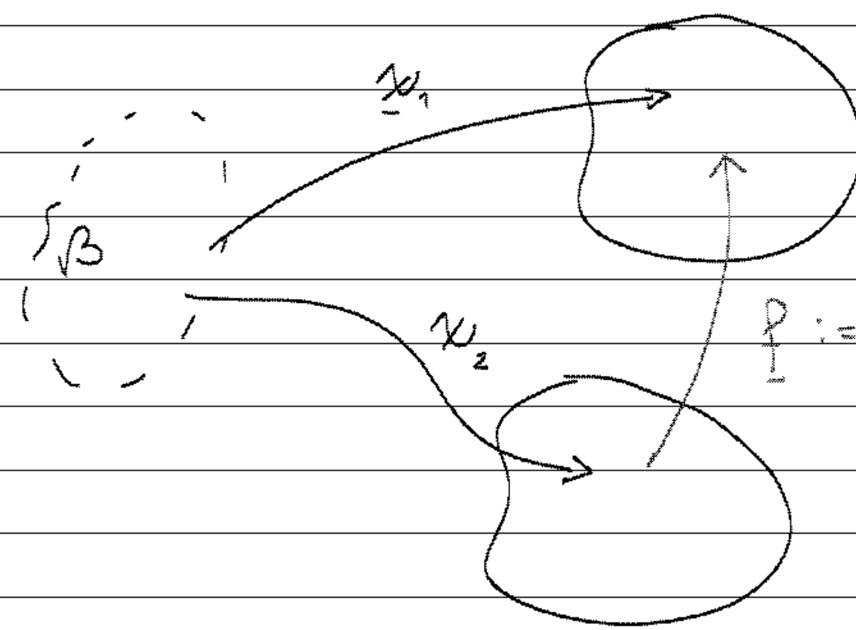
3) f^{-1} è continua (proibisce saldature



NO!)

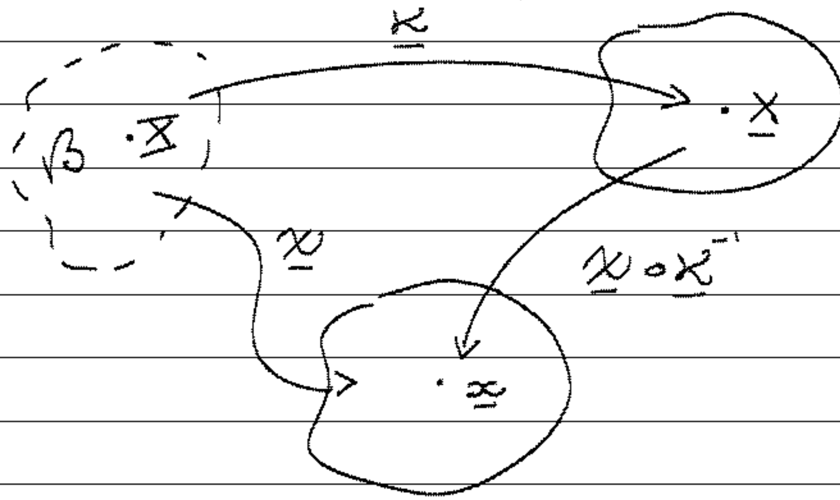
4) f e f^{-1} sono regolari (tipicamente C^1 o H^1)

5) f conserva l'orientamento locale nel senso che $\det \nabla f(p) > 0 \quad \forall p \in \chi_1(B)$.



$f := \chi_1 \circ \chi_2^{-1}$

Anziché lavorare con il corpo $\mathcal{B}$ conviene fissare, tra i vari piazzamenti, un piazzamento, che indicheremo con $\underline{\kappa}$, ed utilizzare come dominio l'insieme $\underline{\kappa}(\mathcal{B})$. Il piazzamento $\underline{\kappa}$ lo chiameremo <u>configurazione di riferimento</u>.



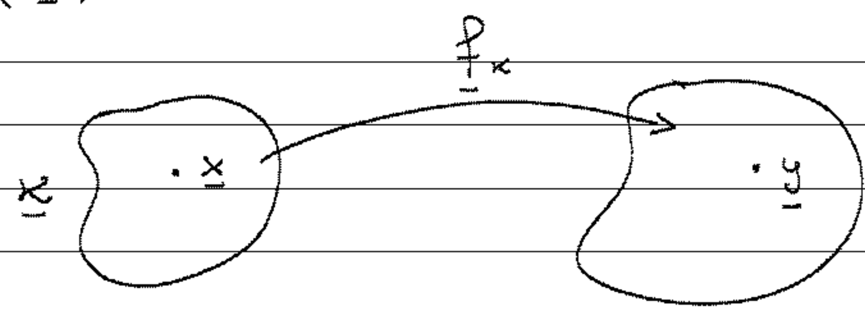
Il piazzamento $\underline{\kappa}$ potrebbe essere, ma non è necessario che lo sia, la posizione occupata dal corpo in un determinato istante.

La posizione di $\underline{X}$ in $\underline{\kappa}$ verrà indicata con $\underline{X}$, i.e., $\underline{X} = \underline{\kappa}(\underline{X})$.
Sia $\underline{\chi}$ un piazzamento (potrebbe rappresentare la posizione attuale del corpo).
Indicheremo con $\underline{f}_\kappa$ la f.ne $\underline{\chi}\circ\underline{\kappa}^{-1}$

$$\underline{f}_\kappa := \underline{\chi}\circ\underline{\kappa}^{-1}$$

e chiameremo con gradiente di deformazione il suo gradiente
$$\underline{F}_\kappa = \nabla \underline{f}_\kappa .$$

Inoltre indicheremo con $\underline{y}$ l'immagine $\underline{f}_\kappa(\underline{x})$.



Per semplicità di notazione, se non ci sono ambiguità, lasceremo cadere il pedice κ.

Definizione Una deformazione $\underline{f}$ si dice rigida se lascia inalterata la distanza mutua tra i vari punti del corpo, i.e.,
$$|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{y})| = |\underline{x} - \underline{y}| \quad \forall \underline{x}, \underline{y}$$

Sia
$$\mathrm{Orth}^+ = SO(3) = \{\underline{Q} \in \mathrm{Lin} : \underline{Q}^T\underline{Q} = \underline{Q}\,\underline{Q}^T = \underline{I},\ \det \underline{Q} = 1\}$$

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1) $\exists\, \underline{Q} \in \mathrm{Orth}^+,\ \underline{a} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{Q}\,\underline{x} + \underline{a}$

2) $\underline{f}$ è rigida

3) $\nabla \underline{f}^T \nabla \underline{f} = \underline{I}$

Dimostriamo che $2 \Rightarrow 1$. Si ha

$$\left(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{y})\right)\cdot\left(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{y})\right) = (\underline{x} - \underline{y})\cdot(\underline{x} - \underline{y})$$

e differenziando rispetto ad $\underline{x}$ otteniamo

$$\nabla \underline{f}(\underline{x})^T \left(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{y})\right) = (\underline{x} - \underline{y})$$

e ora differenziando rispetto ad y si ha

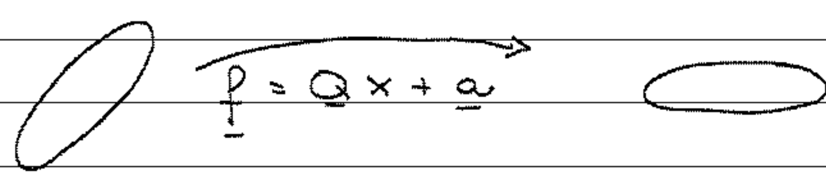
$$\nabla \underline{f}(\underline{x})^T\, \nabla \underline{f}(\underline{y}) = \underline{I}$$

Per cui $\quad \nabla \underline{f}(\underline{y}) = \nabla \underline{f}(\underline{x})^{-T} \quad \forall\, \underline{y}$

e quindi ponendo $\quad \underline{Q} = \nabla \underline{f}(\underline{x}) \in \mathrm{Orth}^+$
si ha

$$\underline{Q} = \nabla \underline{f}(\underline{y}) \qquad \forall\, \underline{y}$$

ed integrando si ottiene la condizione 1) ∎



Teorema di Decomposizione Polare.

Sia $\underline{F}$ un'applicazione lineare invertibile con $\det \underline{F} > 0$, allora esiste una rotazione $\underline{R}$ ed un'applicazione lineare $\underline{U}$ definita positiva tale che

$$\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U}$$

Dim.

Sia $\underline{C} := \underline{F}^T\underline{F}$. Allora $\underline{C}$ è simmetrica e

$\underline{C}\underline{a}\cdot\underline{a} = \underline{F}^T\underline{F}\underline{a}\cdot\underline{a} = \underline{F}\underline{a}\cdot\underline{F}\underline{a} = |\underline{F}\underline{a}|^2$

per cui $\underline{C}\underline{a}\cdot\underline{a} = 0 \Leftrightarrow \underline{F}\underline{a} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$.

Quindi $\underline{C}$ é definito positivo

$\underline{C} = \sum_i \lambda_i^2\, \underline{c}_i \otimes \underline{c}_i$, λ_i^2 autovalore di $\underline{C}$.

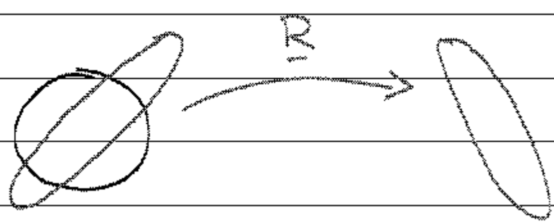
Si ponga

$\underline{U} := \sum \lambda_i\, \underline{c}_i \otimes \underline{c}_i$ e si osservi che

$\underline{U}^2 = \underline{U}\,\underline{U} = \underline{C}$, e che $\underline{U}$ é sym e def. pos.

Infine si ponga $\underline{R} = \underline{F}\,\underline{U}^{-1}$ e si osservi che

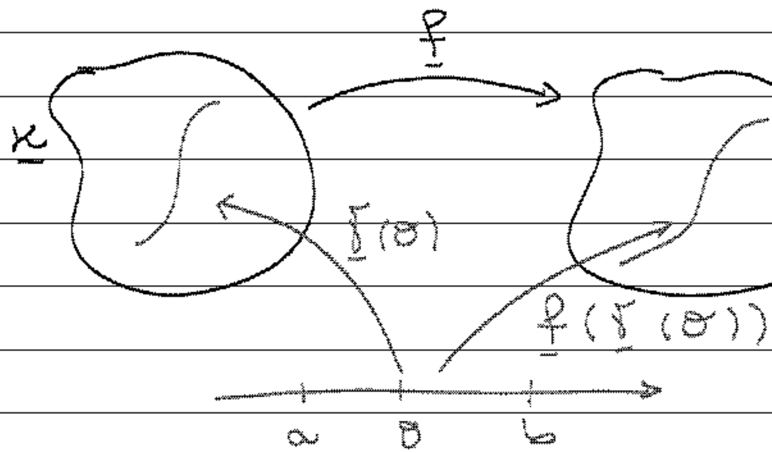
$\underline{R}^T\underline{R} = \underline{U}^{-T}\underline{F}^T\underline{F}\,\underline{U}^{-1} = \underline{U}^{-1}\underline{C}\,\underline{U}^{-1} = \underline{U}^{-1}\underline{U}\,\underline{U}\,\underline{U}^{-1} = \underline{I}$. $\blacksquare$



$$\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U}$$

2. Variazioni di volume, area e lunghezza

Si consideri una curva $\underline{\gamma}$ in $\underline{K}$.
Calcoliamo la lunghezza della curva $\underline{f} \circ \underline{\gamma}$.



La lunghezza iniziale (della curva nella configurazione $\underline{K}$) l_0 è data da

$$l_0 = \int_a^b \left| \frac{d\underline{\gamma}}{d\theta} \right| d\theta = \int_a^b |\dot{\underline{\gamma}}| \, d\theta$$

mentre a def. avvenuta si ha

$$l = \int_a^b \left| \frac{d(\underline{f} \circ \underline{\gamma})}{d\theta} \right| d\theta$$

Poniamo

$$dl_0 := |\dot{\underline{\gamma}}| \, d\theta \quad e \quad dl := \left| \frac{d(\underline{f} \circ \underline{\gamma})}{d\theta} \right| d\theta$$

$$dl = \left| \frac{d(\underline{f} \circ \underline{\gamma})}{d\theta} \right| d\theta = \left| \nabla \underline{f} \circ \underline{\gamma}\, \dot{\underline{\gamma}} \right| d\theta = \left| \underline{F} \circ \underline{\gamma}\, \dot{\underline{\gamma}} \right| d\theta$$

che per semplicità scriviamo come

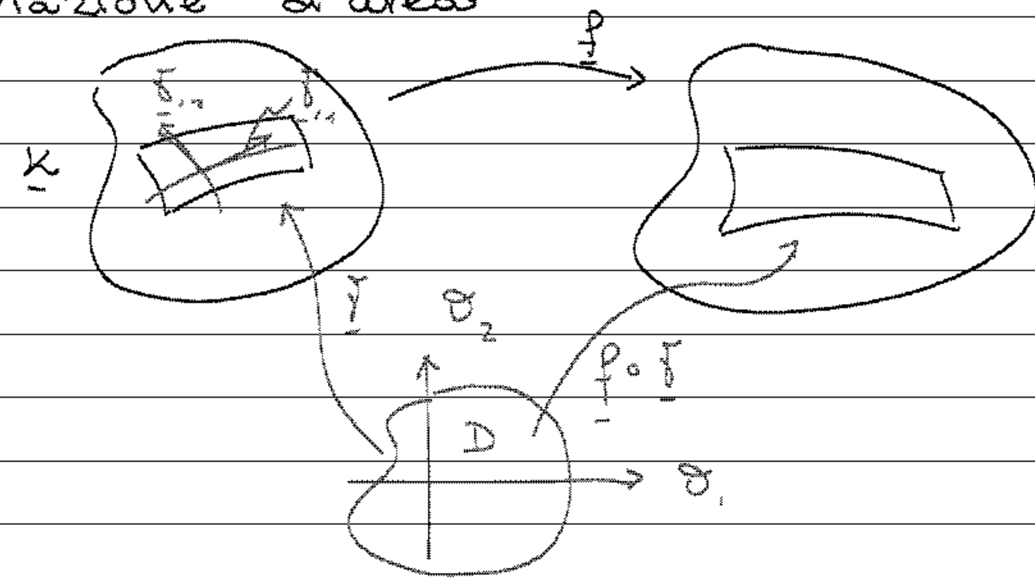
$$dl = | \underline{F}\, \dot{\underline{\gamma}} |\, d\theta = \left(\underline{F}\dot{\underline{\gamma}} \cdot \underline{F}\,\dot{\underline{\gamma}} \right)^{1/2} d\theta =$$

$$= \left(\underline{F}^T \underline{F}\, \dot{\underline{\gamma}} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \right)^{1/2} d\theta = \left(\underline{C}\, \dot{\underline{\gamma}} \cdot \dot{\underline{\gamma}} \right)^{1/2} d\theta$$

dove abbiamo posto

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{U}^2 .$$

Variazione d'area



Come prima poniamo

$$da_0 = | \underline{\gamma}_{,1} \times \underline{\gamma}_{,2} |\, d\theta_1\, d\theta_2$$

e
$$d\underline{a} = | (\underline{f} \circ \underline{\gamma})_{,1} \times (\underline{f} \circ \underline{\gamma})_{,2} |\, d\theta_1\, d\theta_2$$

Prima di procedere conviene ricordare la definizione di cofattore di una applicazione lineare $\underline{F}$.

$$\mathrm{cof}\,\underline{F}\;\underline{\alpha}\times\underline{\beta} := \underline{F}\,\underline{\alpha}\times\underline{F}\,\underline{\beta} \qquad \forall\, \underline{\alpha},\underline{\beta}.$$

Dato che $\underline{F}\,\underline{a}\times\underline{F}\,\underline{b}\cdot\underline{F}\,\underline{c} = (\det\underline{F})\;\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c}$ per ogni tre vettori linearmente dipendenti $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$, otteniamo

$$\mathrm{cof}\,\underline{F}\;\underline{\alpha}\times\underline{\beta}\cdot\underline{F}\,\underline{\delta} = \underline{F}\,\underline{\alpha}\times\underline{F}\,\underline{\beta}\cdot\underline{F}\,\underline{\delta} =$$

$$\underline{F}^T\mathrm{cof}\,\underline{F}\;\underline{\alpha}\times\underline{\beta}\cdot\underline{\delta} = \det\underline{F}\;\underline{\alpha}\times\underline{\beta}\cdot\underline{\delta}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{F}^T\mathrm{cof}\,\underline{F} = \underline{I}\det\underline{F}\,,$$

Si ha

$$\begin{aligned}
da &= |\underline{F}\,\underline{\gamma}_{,1}\times\underline{F}\,\underline{\gamma}_{,2}|\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2 = \\
&= |\mathrm{cof}\,\underline{F}\;\underline{\gamma}_{,1}\times\underline{\gamma}_{,2}|\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2 = \\
&= \det\underline{F}\;|\underline{F}^{-T}\,\underline{\gamma}_{,1}\times\underline{\gamma}_{,2}|\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2 \\
&= \det\underline{F}\left((\underline{F}^T\underline{F})^{-1}\,\underline{\gamma}_{,1}\times\underline{\gamma}_{,2}\cdot\underline{\gamma}_{,1}\times\underline{\gamma}_{,2}\right)^{1/2} d\vartheta_1\,d\vartheta_2
\end{aligned}$$

$$da = \left(\det \underline{C} \;\; \underline{C}^{-1} \underline{\gamma}_{,1} \times \underline{\gamma}_{,2} \cdot \gamma_{,1} \times \gamma_{,2}\right)^{1/2} d\theta_1 \, d\theta_2$$

Infine la variazione di volume é data da
$dv = \det \underline{F} \;\; d\underline{x} = (\det \underline{C})^{1/2} \, d\underline{x}$.

Si osserva quindi che le variazioni di lunghezza, d'area e di volume dipendono semplicemente da $\underline{C} = \underline{U}^2$ e non da $\underline{F}$. In altre parole non dipendono da $\underline{R}$, con $\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U}$.

$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}$ Tensore destro di Cauchy - Green

A deformazione nulla si ha $\underline{F} = \underline{I}$ e $\underline{C} = \underline{I}$.
La misura di deformazione

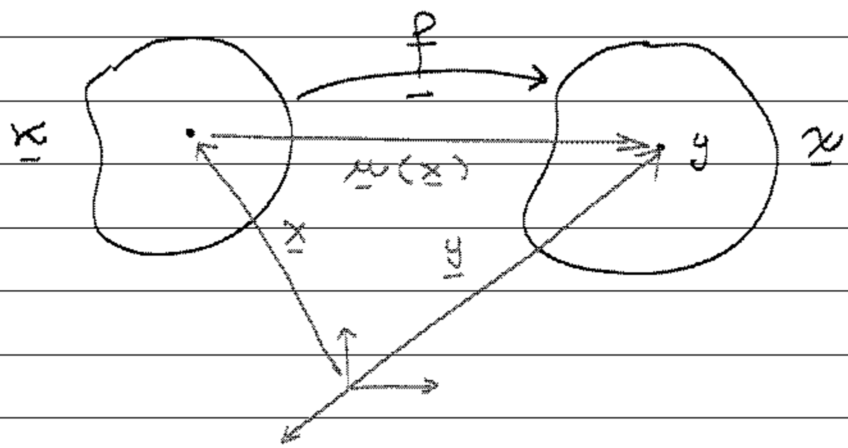
$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I})$$

fa corrispondere ad una deformazione nulla il tensore nullo.

$\underline{E}$ = tensore di Green - St. Venant (o Lagrangiano).

3. Deformazioni infinitesime

Sia $\underline{\kappa}$ la configurazione di riferimento di un dato corpo ed $\underline{\chi}$ un piazzamento.



Indichiamo, come al solito, con
$\underline{x} = \underline{\kappa}(\underline{X})$ e con $\underline{y} = \underline{\chi}(\underline{X}) = \underline{f}(\underline{x})$

Si definisca
$$\underline{u}(\underline{x}) := \underline{f}(\underline{x}) - \underline{x}.$$

$\underline{u}(\underline{x})$ rappresenta lo <u>spostamento</u> del punto $\underline{x}$ dalla configurazione $\underline{\kappa}$ al piazzamento $\underline{\chi}$.

Abbiamo
$$\underline{H}(x) := \nabla \underline{u}(\underline{x}) = \underline{F}(x) - \underline{I}$$
ed $\underline{H} = \nabla \underline{u}$ è chiamato <u>gradiente di spostamento</u>

Una deformazione $\underline{f}$ è "piccola" se il gradiente di deformazione differisce di poco dall'identità.
Indichiamo con

$$\varepsilon := |\underline{F} - \underline{I}| = |\underline{H}|,$$

il parametro di piccolezza.
Si ha

$$\underline{H} = \varepsilon \frac{\underline{H}}{|\underline{H}|} =: \varepsilon \underline{\tilde{H}} \quad \text{dove} \quad |\underline{\tilde{H}}| = 1.$$

In teoria infinitesima si assume che $\varepsilon \ll 1$ e si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore a ε. Per cui

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = (\underline{I} + \varepsilon \underline{\tilde{H}})^T (\underline{I} + \varepsilon \underline{\tilde{H}})$$
$$= \underline{I} + \varepsilon \underline{\tilde{H}}^T + \varepsilon \underline{\tilde{H}} + \cancel{\varepsilon^2 \underline{\tilde{H}}^T \underline{\tilde{H}}}$$
$$\cong \underline{I} + \underline{H}^T + \underline{H}$$

da cui

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}) \cong \frac{1}{2}(\underline{H}^T + \underline{H})$$

Consideriamo ora una deformazione rigida infinitesima $\underline{F} = \underline{Q} \in \mathrm{Orth}$.
Allora

$$\underline{I} = \underline{F}^T \underline{F} = (\underline{I} + \varepsilon \underline{\tilde{H}})^T (\underline{I} + \varepsilon \underline{\tilde{H}}) =$$

$$\cancel{\underline{I}} = \cancel{\underline{I}} + \varepsilon \underline{\tilde{H}}^T + \varepsilon \underline{\tilde{H}} + \cancel{\varepsilon^2 \tilde{H}^T \tilde{H}}$$

e quindi

$$\underline{H} = -\underline{H}^T$$

ovvero

$$\underline{H} \in Skw = \{ \underline{W} \in Lin : \underline{W} = -\underline{W}^T \}$$

Da qui la seguente

<u>Definizione</u> Uno spostamento $\underline{u}$ si dice uno <u>spostamento rigido infinitesimo</u> se esiste $\underline{W} \in Skw$ ed un vettore $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ per cui si ha

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{a} + \underline{W}\,\underline{x}.$$

Sia $\Omega := \underline{k}(\mathcal{B})$.

Indichiamo con

$$\mathcal{R}_\Omega := \{ \underline{u}(\underline{x}) = \underline{W}\,\underline{x} + \underline{a} \; ; \; \underline{W} \in Skw, \; \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \}$$

l'insieme degli spostamenti rigidi infinitesimi su Ω.

Si osservi che se $|\Omega| = \mathcal{L}^3(\Omega) < +\infty$ allora

$$\mathcal{R}_\Omega \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Dato che $\mathcal{R}_\Omega$ ha dimensione finita, si ha che è un sottospazio chiuso di $L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ per cui

$\forall \underline{u} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)\ \exists!\ \underline{r} \in \mathcal{R}_\Omega$ tale che

$$\|\underline{u}-\underline{r}\|_{L^2} = \inf_{\underline{q}\in \mathcal{R}_\Omega} \|\underline{u}-\underline{q}\|_{L^2}$$

Inoltre tale $\underline{r}$ è caratterizzato da (vedi Brezis, p. 130)

$$\int_\Omega (\underline{u}-\underline{r})\cdot \underline{q}\, dx = 0 \qquad \forall \underline{q} \in \mathcal{R}_\Omega \tag{3.1}$$

Tale $\underline{r}$ viene chiamata la proiezione di $\underline{u}$ su $\mathcal{R}_\Omega$.

Scriveremo $\mathcal{P}\underline{u} = \underline{r}$.

Osserviamo che $\underline{u} = \mathcal{P}\underline{u} + (\underline{u}-\mathcal{P}\underline{u})$ e

$\int (\underline{u}-\mathcal{P}\underline{u})\cdot \underline{q} = 0 \quad \forall \underline{q} \in \mathcal{R}_\Omega$, per la (3.1)

e quindi se

$$\mathcal{R}_\Omega^\perp = \left\{ \underline{v} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3) : \int_\Omega \underline{v}\cdot\underline{r} = 0 \quad \forall \underline{r} \in \mathcal{R}_\Omega \right\}$$

si ha

$$L^2(\Omega,\mathbb{R}^3) = \mathcal{R}_\Omega \oplus \mathcal{R}_\Omega^\perp,$$

i.e. $\mathcal{R}_\Omega \cap \mathcal{R}_\Omega^\perp = \{\underline{0}\}$, $\mathcal{R}_\Omega + \mathcal{R}_\Omega^\perp = L^2$.

Per esercizio calcoliamo $\wp\underline{u}$.

Sia $\wp\underline{u} = \underline{W}^u \underline{x} + \underline{a}^u = \underline{\omega}^u \times \underline{x} + \underline{a}^u$. Allora

$$\int_\Omega (\underline{u} - \wp\underline{u})\cdot(\underline{W}\,\underline{x} + \underline{a}) = 0 \qquad \forall \underline{W} \in Skw,\ \underline{a} \in \mathbb{R}^3$$

ovvero

$$\int_\Omega (\underline{u} - \wp\underline{u})\cdot(\underline{\omega}\times\underline{x} + \underline{a}) = 0 \qquad \forall \underline{\omega}, \underline{a} \in \mathbb{R}^3$$

segue che (prendendo $\underline{\omega} = \underline{0}$)

$$\int_\Omega \wp\underline{u}\cdot\underline{a} = \int_\Omega \underline{u}\cdot\underline{a} \qquad \forall \underline{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$\int_\Omega \wp\underline{u} = \int_\Omega \underline{u},$$

e quindi

$$\int_\Omega \underline{W}^{u}\,\underline{x} + \underline{a} = \int_\Omega \underline{u}$$

$$\iff \quad \underline{W}^{u}\,\underline{x}_G + \underline{a}^{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \underline{u} = \fint_\Omega \underline{u}$$

baricentro

Prendendo $\underline{a} = \underline{0}$ invece si ha

$$\int_\Omega \mathbb{P}\underline{u} \cdot \underline{\omega} \times \underline{x} = \int_\Omega \underline{u} \cdot \underline{\omega} \times \underline{x}$$

$$\int_\Omega \underline{x} \times \mathbb{P}\underline{u} = \int_\Omega \underline{x} \times \underline{u}$$

ovvero

$$\int_\Omega \underline{x} \times \left(\underline{\omega}^{u} \times \underline{x} + \underline{a}^{u} \right) = \int_\Omega \underline{x} \times \underline{u}$$

$$\fint_\Omega \underline{x} \times (\underline{\omega}^{u} \times \underline{x}) + \underline{x}_G \times \underline{a}^{u} = \fint_\Omega \underline{x} \times \underline{u}$$

Riassumendo abbiamo

$$\underline{W}^{u}\,\underline{x}_g + \underline{a}^{u} = \int_\Omega \underline{u}$$

$$\int_\Omega \underline{x} \times \underline{W}^{u}\,\underline{x}\,dx + \underline{x}_g \times \underline{a}^{u} = \int_\Omega \underline{x} \times \underline{u}$$

Si osservi che se $\underline{x}_g = \underline{0}$ (la terna d'assi è baricentrica) si ha

$$\boxed{\underline{a}^{u} = \int_\Omega \underline{u}}$$

$$\int_\Omega \underline{x} \times \underline{W}^{u}\,\underline{x}\,dx = \int_\Omega \underline{x} \times \underline{u}$$

$$\int_\Omega \underline{x} \times \underline{\omega}^{u} \times \underline{x}\,dx =$$

Ponendo I_o l'operatore definito da

$$\underline{a} \longmapsto \int_\Omega \underline{x} \times \underline{a} \times \underline{x}\,dx$$

si ha

$$\boxed{\underline{\omega}^{u} = I_o^{-1} \int_\Omega \underline{x} \times \underline{u}\,dx}$$

Si osservi che

$$\underline{H}(\underline{x}) = \nabla \underline{u}(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u}(\underline{x}) + \nabla \underline{u}(x)^T\right)}_{\underline{E}\,\underline{u}(\underline{x}) \equiv \underline{E}(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u}(x) - \nabla u(\underline{x})^T\right)}_{\underline{W}\,\underline{u}(\underline{x}) \equiv \underline{W}(x)}$$

$$\qquad\qquad \cap \qquad\qquad\qquad\qquad \cap$$

$$\qquad\qquad \mathrm{Sym} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Skw}$$

dove

$$\mathrm{Sym} = \{\underline{E} \in \mathrm{Lin} : \underline{E} = \underline{E}^T\}.$$

Quindi

$$\underline{H}(x) = \nabla \underline{u}(\underline{x}) = \underline{E}\,\underline{u}(\underline{x}) + \underline{W}\,\underline{u}(\underline{x}).$$

Se $u \in C^2(\Omega)$ allora si ha

$$\frac{\partial W_{ij}(u)}{\partial x_k} = \frac{\partial E_{ik}(u)}{\partial x_j} - \frac{\partial E_{jk}(u)}{\partial x_i}$$

infatti si ha

$$2\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_k} = u_{i,jk} - u_{j,ik} = (u_{i,k} + u_{k,i})_{,j} - u_{k,ij} - u_{j,ik}$$

$$= 2E_{ik,j} - 2E_{jk,i}.$$

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

1) $\underline{u} \in \mathcal{R}_\Omega$

2) $\underline{\underline{E}}(\underline{u}) = 0$

Dim. 1) $\Rightarrow$ 2) banale

2) $\Rightarrow$ 1). Se $\underline{\underline{E}}\,\underline{u} = 0$, allora si ha

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_k} = 0$$

per l'eq.ne precedente e quindi

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} = 0 .$$

Quindi $\nabla \underline{u}(\underline{x}) = \underline{H}(\underline{x}) = \text{cost}$. Dato che $\underline{\underline{E}} = \underline{0}$ si ha $\underline{H}(\underline{x}) = \text{cost} \in \text{SKW}$. ■