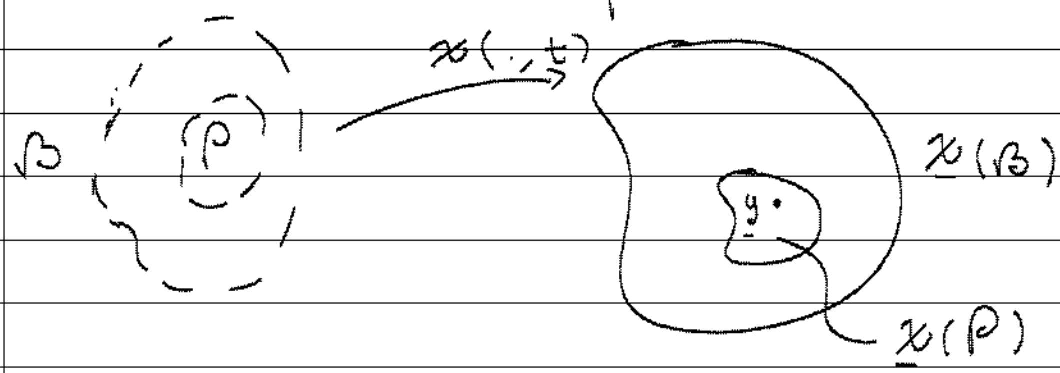
Analisi della Tensione (cenni)

Titolo nota 01/05/2006

Conservazione della quantità di moto



La quantità di moto del sottocorpo $\mathcal{P}$ di $\mathcal{B}$ è

$$\underline{\mathcal{Q}}(\mathcal{P},t)=\int_{\underline{\chi}(\mathcal{P},t)}\rho\,\underline{\dot{y}}\,dv$$

Sia $\underline{f}(\mathcal{P},t)$ la risultante delle forze agenti su $\mathcal{P}$ nell'istante t, allora

<u>Assioma</u> $\forall\,\mathcal{P}\subset\mathcal{B}$ si ha

$$\dot{\underline{\mathcal{Q}}}(\mathcal{P},t)=\underline{f}(\mathcal{P},t)$$

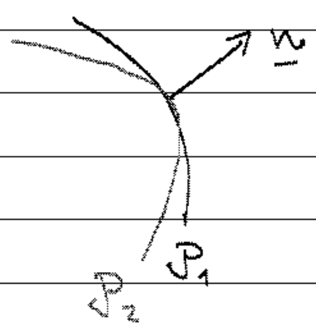
Le forze si dividono in forze di contatto e in forze di volume

$$\underline{f}(\mathcal{P},t) = \int_{\chi(\mathcal{P},t)} \underline{b}\, dv + \int_{\partial\chi(\mathcal{P},t)} \underline{t}(\underline{y},\mathcal{P},t)\, da$$

forza per
unità di
volume

$\underline{t}(\underline{y},\mathcal{P},t)$ é il vettore tensione e rappresenta le forze di contatto esercitate su $\mathcal{P}$ nell'istante t

Si dimostra (Hamel, Noll) che $\underline{t}(\underline{y},\cdot,t)$ dipende da $\mathcal{P}$ soltanto attraverso la normale a $\chi(\mathcal{P},t)$



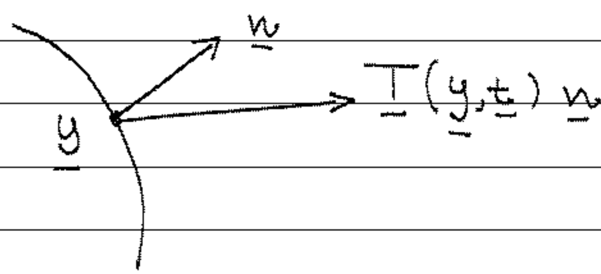
$$\underline{t}(\underline{y},\mathcal{P}_1,t) = \underline{t}(\underline{y},\mathcal{P}_2,t) =: \underline{t}(\underline{y},\underline{n},t)$$

si ha

$$\left(\int_{\chi(\mathcal{P},t)} \rho\,\dot{\underline{y}}\; dv\right)^{\cdot} = \int_{\partial\chi(\mathcal{P},t)} \underline{t}(\underline{y},\underline{n},t)\, da + \int_{\chi(\mathcal{P},t)} \underline{b}\, dv$$

Utilizzando questa eq.ne si dimostra (Teorema di Cauchy) che esiste in ogni punto $\underline{y} \in \underline{\chi}(\mathcal{B})$ ed ad ogni istante t, un tensore $\underline{T}(\underline{y},t)$ tale che

$$\underline{t}(\underline{y}\ \underline{n}, t) = \underline{T}(\underline{y}, t)\ \underline{n} .$$



L'eq.ne della conservazione del moto (localizzata) diventa

$$\boxed{\rho \ddot{\underline{y}} = \operatorname{div} \underline{T} + \underline{b}}$$

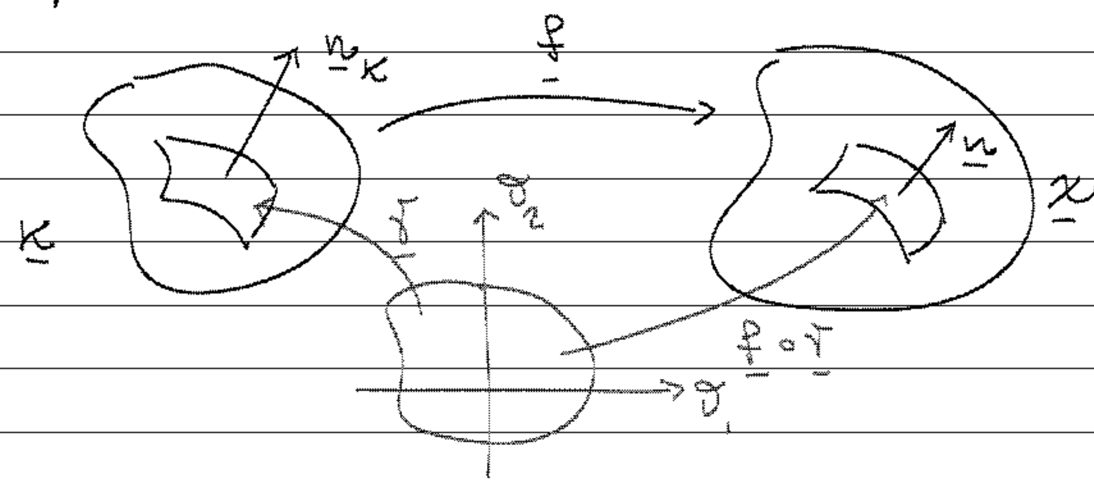
Si dimostra che la conservazione del momento della quantità di moto è soddisfatta se e solo se

$$\boxed{\underline{T} = \underline{T}^{T} .}$$

$\underline{T}$ = Tensore degli sforzi di Cauchy.

Tensore di Piola - Kirchhoff.

Il tensore di Cauchy è definito sulla configurazione attuale del corpo che in genere non è nota.
Il tensore di Piola - Kirchhoff è, in un certo senso, la preimmagine del tensore di Cauchy sulla configurazione di riferimento.



$$\underline{n} = \frac{(\underline{f}\circ\underline{\gamma})_{,1} \times (\underline{f}\circ\underline{\gamma})_{,2}}{|(\underline{f}\circ\underline{\gamma})_{,1} \times (\underline{f}\circ\underline{\gamma})_{,2}|} =$$

$$(\underline{f}\circ\underline{\gamma})_{,1} \times (\underline{f}\circ\underline{\gamma})_{,2} = \underline{F}\,\underline{\gamma}_{,1} \times \underline{F}\,\underline{\gamma}_{,2} =$$

$$= \mathrm{cof}\,\underline{F}\;\underline{\gamma}_{,1} \times \underline{\gamma}_{,2} = \mathrm{cof}\,\underline{F}\;\underline{n}_\kappa\,|\underline{\gamma}_{,1} \times \underline{\gamma}_{,2}|$$

per cui se

$$\mathcal{S}_\kappa = \underline{\gamma}(D) \qquad e \qquad \mathcal{S} = \underline{f}(\underline{\gamma}(D))$$

abbiamo

$$\int_{\mathcal{S}} \underline{T}\, \underline{n}\, da = \int_{\mathcal{S}} \underline{T}\, \mathrm{cof}\, \underline{F}\, \underline{n}_\kappa \frac{|\underline{\gamma}_{,1} \times \underline{\gamma}_{,2}|}{|\underline{F}\underline{\gamma}_{,1} \times \underline{F}\underline{\gamma}_{,2}|}\, da$$

$$= \int_{\mathcal{S}_\kappa} \underline{T}\, \mathrm{cof}\, \underline{F}\, \underline{n}_\kappa da_\kappa$$

Poniamo

$$\underline{S} := \underline{T}\, \mathrm{cof}\, \underline{F} = (\det F)\, \underline{T}\, F^{-T}$$

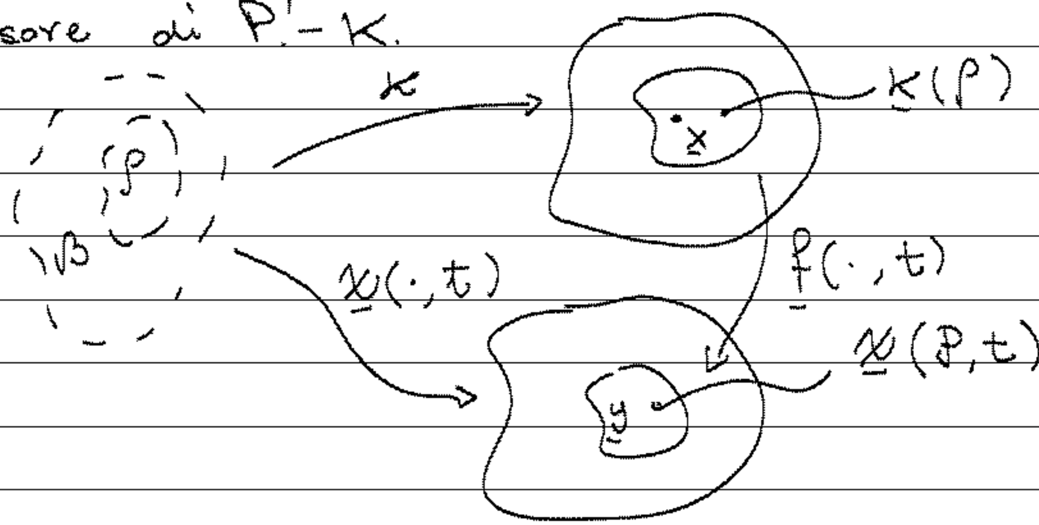
in modo che

$$\int_{\mathcal{S}} \underline{T}\, \underline{n}\, da = \int_{\mathcal{S}_\kappa} \underline{S}\, \underline{n}_\kappa\, da_\kappa$$

S = I° tensore di Piola - Kirchhoff

$$\underline{T} = \underline{T}^T \iff \underline{S}\underline{F}^T = \underline{F}\, \underline{S}^T$$

Eq. ni di equilibrio in termini del tensore di P.-K.



Dato che

$$\rho \ddot{\underline{y}} = \operatorname{div} \underline{T} + \underline{b} \quad \text{in} \quad \underline{\chi}(P, t)$$

si ha

$$\int_{\underline{\chi}(P,t)} \rho \ddot{\underline{y}} = \int_{\underline{\chi}(P,t)} \operatorname{div} \underline{T} + \underline{b} \; dv$$

$$= \int_{\partial \underline{\chi}(P,t)} \underline{T} \underline{n} \; da + \int_{\underline{\chi}(P,t)} \underline{b} \; dv$$

$$\int_{\underline{K}(P)} \rho \det F \; \ddot{\underline{y}} \; dv_{x} = \int_{\partial \underline{K}(P)} \underline{S} \, \underline{n}_{x} \; da_{x} + \int_{\underline{K}(P)} \det F \; \underline{b} \; dv_{x}$$

$$\int_{\underline{\kappa}(P)} \rho \det F \, \ddot{y} \, dv_\kappa = \int_{\underline{\kappa}(P)} \mathrm{Div}\, \underline{S} + \det F \, \underline{b} \; dv_\kappa$$

Dato che l'insieme P è arbitrario si ha

$$\boxed{\rho_\kappa \, \ddot{y} = \mathrm{Div}\, \underline{S} + \underline{b}_\kappa} \quad \text{in } \underline{\kappa}(\mathcal{B})$$

dove

$$\rho_\kappa = \det F \; \rho$$

$$\underline{b}_\kappa = \det F \; \underline{b}$$

Ricordiamo inoltre che

$$\boxed{\underline{S}\,\underline{F}^T \in \mathrm{Sym}} \quad \text{in } \underline{\kappa}(\mathcal{B})$$