

Capitolo 9

Coercività e semicontinuità di funzionali integrali

In questa lezione torniamo a considerare problemi di minimo per funzionali integrali del tipo

$$(9.1) \quad \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx.$$

dove

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto (u_1(x), \dots, u_m(x)) \end{aligned}$$

(nel caso dell'energia elastica interesserà in particolare il caso $m = 3$).

Indicheremo con $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (rispettivamente $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$) lo spazio delle funzioni $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ tali che $u_i \in L^p(\Omega)$ (risp. $u_i \in W^{1,p}(\Omega)$) per ogni $i = 1, \dots, m$.

Considereremo dapprima il caso più semplice dei funzionali definiti su $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. In questo caso il funzionale non dipende dal gradiente.

Coercività in alcuni spazi

- $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $1 < p < +\infty$ e $\tau =$ topologia debole:

$$\alpha > 0, \beta \geq 0, F(u) \geq \alpha \|u\|_p - \beta \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente coerciva};$$

se $F(u) = \int_{\Omega} f(x, u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z) \geq \alpha |z|^p + \beta(x), \quad \alpha > 0, \beta \in L^1(\Omega);$$

- $L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole:

$$k \geq 0, \Phi \text{ superlineare}, F(u) \geq \int_{\Omega} \Phi(|u|) dx - k \quad \Rightarrow \quad F \text{ debolmente coerciva};$$

se $F(u) = \int_{\Omega} f(x, u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z) \geq \Phi(|z|) + \beta(x), \quad \beta \in L^1(\Omega);$$

- $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole*:

$$R > 0, F(u) = +\infty \text{ se } \|u\|_\infty > R \Rightarrow F \text{ debolmente* coerciva};$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x, u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z) \geq \chi_{|z| \leq R}(z) + \beta(x), \quad R > 0, \beta \in L^1(\Omega)$$

dove $\chi_{|z| \leq R}(z)$ è una funzione che vale 0 se $|z| \leq R$ e $+\infty$ altrimenti;

- $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $1 < p < +\infty$ e $\tau =$ topologia debole:

$$\alpha > 0, \beta \geq 0, F(u) \geq \alpha \|u\|_{1,p} - \beta \Rightarrow F \text{ debolmente coerciva};$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z, \xi) \geq \alpha(|z|^p + |\xi|^p) + \beta(x), \quad \alpha > 0, \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $1 < p < +\infty$ e $\tau =$ topologia debole:

$$\alpha > 0, \beta \geq 0, F(u) \geq \alpha \|\nabla u\|_p - \beta \Rightarrow F \text{ debolmente coerciva};$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z, \xi) \geq \alpha|\xi|^p + \beta(x), \quad \alpha > 0, \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole:

$$k \geq 0, \Phi \text{ superlineare}, F(u) \geq \int_\Omega \Phi(|u| + |\nabla u|) dx - k \Rightarrow F \text{ deb. coerciva};$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z, \xi) \geq \Phi(|z| + |\xi|) + \beta(x), \quad \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W_0^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole:

$$k \geq 0, \Phi \text{ superlineare}, F(u) \geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) dx - k \Rightarrow F \text{ deb. coerciva};$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z, \xi) \geq \Phi(|\xi|) + \beta(x), \quad \beta \in L^1(\Omega);$$

- $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\tau =$ topologia debole*:

$$R > 0, F(u) = +\infty \text{ se } \|u\|_{1,\infty} > R \Rightarrow F \text{ debolmente* coerciva};$$

se $F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx$ la condizione diventa

$$f(x, z) \geq \chi_{|z|+|\xi| \leq R} + \beta(x), \quad R > 0, \beta \in L^1(\Omega).$$

Teoremi di semicontinuità. Caso dei funzionali convessi.

Sia μ una misura positiva, finita¹ e completa² su una σ -algebra³ \mathcal{F} di sottoinsiemi di Ω aperto limitato di \mathbb{R}^n .

Indicheremo con \mathcal{B}_m la σ -algebra di Borel⁴ di \mathbb{R}^m . Ricordiamo che la σ -algebra prodotto $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_m$ è la più piccola σ -algebra su $\Omega \times \mathbb{R}^m$ contenente la famiglia $\{F \times B : F \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{B}_m\}$.

Definizione 9.1 Una funzione $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ è detta

- (a) un integrando se è $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_m$ -misurabile;⁵
- (b) un integrando normale se f è un integrando e $f(x, \cdot)$ è s.c.i. per μ -q.o. $x \in \Omega$;
- (c) un integrando convesso se f è un integrando e $f(x, \cdot)$ è convessa e s.c.i. per μ -q.o. $x \in \Omega$;
- (d) un integrando di Carathéodory se f è un integrando e $f(x, \cdot)$ è finita e continua per μ -q.o. $x \in \Omega$.

Una funzione $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow]-\infty, +\infty]$ è detta

- (e) un integrando normale convesso se f è $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_k$ -misurabile ed esiste $N \subset \Omega$ con $\mu(N) = 0$ tale che

$$\begin{aligned} f(x, \cdot, \cdot) &\text{ è s.c.i. per ogni } x \in \Omega \setminus N; \\ f(x, z, \cdot) &\text{ è convessa per ogni } x \in \Omega \setminus N \text{ e } z \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Dimostrare per esercizio che esistono funzioni $g : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$ convesse non s.c.i..

Supponiamo d'ora in poi, per semplicità, che $f \geq 0$, ma tutti i risultati si possono estendere a funzioni di segno non costante purché i funzionali siano ben definiti.

Teorema 9.2 Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$ un integrando e

$$F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(x, u(x)) d\mu(x) & \text{se l'integrale ha senso,} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Se f è normale allora F è s.c.i. rispetto alla convergenza forte di $L_{\mu}^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$;
2. se f è convesso allora F è s.c.i. rispetto alla convergenza debole di $L_{\mu}^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

1 e 2 del teorema precedente si possono riguardare come casi particolari del seguente.

¹Per semplicità di esposizione. In effetti tutto quello che diremo vale anche se μ è σ -finita.

²La completezza è in realtà una proprietà della coppia (μ, \mathcal{F}) che si dice completa se ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla risulta misurabile. La misura di Lebesgue è completa sulla σ -algebra dei misurabili secondo Lebesgue.

³Una famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di Ω è detta una σ -algebra se gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) $B \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus B \in \mathcal{F}$
- (iii) $B_h \in \mathcal{F} \forall h \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{h \in \mathbb{N}} B_h \in \mathcal{F}$.

Gli elementi di \mathcal{F} si chiamano *insiemi misurabili*. Si può pensare, per fissare le idee, che μ sia la misura di Lebesgue su Ω e che \mathcal{F} sia la famiglia di tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

⁴Cioè la più piccola σ -algebra contenente i sottoinsiemi aperti (e di conseguenza anche i chiusi).

⁵Cioè la controimmagine di ogni aperto è misurabile (cioè appartiene a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_m$). Nel caso di funzioni a valori reali estesi, come in quello in esame, ciò equivale alla misurabilità degli insiemi di sottolivello.

Teorema 9.3 (De Giorgi - Ioffe) Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$ un integrando normale convesso. Allora il funzionale $F : L^1_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m) \times L^1_\mu(\Omega; \mathbb{R}^k) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$F(u, v) = \int_\Omega f(x, u(x), v(x)) d\mu(x),$$

è ben definito e s.c.i. rispetto alla convergenza forte di $L^1_\mu(\Omega; \mathbb{R}^m)$ nella variabile u e a quella debole di $L^1_\mu(\Omega; \mathbb{R}^k)$ nella variabile v .

Ricordando la caratterizzazione della convergenza debole negli spazi di Sobolev, si ottiene immediatamente, come corollario, il seguente teorema di semicontinuità per funzionali integrali su spazi di Sobolev (in tal caso μ è la misura di Lebesgue).

Corollario 9.4 Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \rightarrow [0, +\infty]$ un integrando normale convesso. Allora il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

è seq. s.c.i. rispetto alla convergenza debole di $W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

DIMOSTRAZIONE La conclusione è immediata se Ω ha frontiera localmente lipschitziana perché se $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,1}$ per il teorema di Rellich $u_h \rightarrow u$ in L^1 e quindi la tesi si ottiene scegliendo $v_h = Du_h$ e applicando il teorema di De Giorgi - Ioffe. Se la frontiera di Ω non è regolare, si può approssimare Ω dall'interno mediante aperti con frontiera regolare (cfr. Buttazzo [2], Lemma 4.2.10) ed il risultato già ottenuto può essere applicato ai funzionali F_h definiti come integrali su Ω_h . Per dimostrare la semicontinuità di F è allora sufficiente osservare che, per la positività degli integrandi, F è l'estremo superiore dei funzionali F_h . \square

Esempio 9.5 In base al teorema, il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega \langle A(x)\nabla u, \nabla u \rangle dx - \int_\Omega g(x)u dx$$

considerato nell'esempio 8.27 risulta sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente in $W_0^{1,2}(\Omega)$ anche se la matrice $A(x)$ non è limitata purché abbia coefficienti misurabili e non negativi. In tal caso però, a differenza di quanto succedeva nell'esempio 8.27, la parte quadratica del funzionale potrebbe non essere una norma.

Richiami e complementi sulle funzioni convesse

Prima di affrontare la dimostrazione del teorema di De Giorgi e Ioffe è opportuno richiamare alcune proprietà delle funzioni convesse approfondendone ulteriormente lo studio. Sarà anche un'occasione per rivedere meglio alcune cose appena accennate.

Sia X uno spazio vettoriale. In un capitolo precedente è stata data la definizione di funzione convessa $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Abbiamo già osservato inoltre che f è convessa se e solo se l'epigrafo è un insieme convesso. In un'altra occasione abbiamo osservato che se f è convessa allora gli insiemi di sottolivello sono convessi (non vale il viceversa come mostra l'esempio della funzione $f(x) = x^3$).

Una conseguenza dell'aver ammesso anche $+\infty$ tra i possibili valori di f è che se C è un sottoinsieme convesso di X e $f : C \rightarrow (-\infty, +\infty]$ è una funzione convessa, cioè vale la disuguaglianza di convessità

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

per ogni $x, y \in C$ ed ogni $\lambda \in (0, 1)$, allora l'estensione a $+\infty$ di f su X è una funzione convessa. Possiamo quindi limitarci a considerare funzioni convesse definite su tutto X . Inoltre la funzione indicatrice di un sottoinsieme C di X è convessa se e solo se C è convesso e questo riconduce lo studio degli insiemi convessi a quello delle funzioni convesse.

Invece le funzioni convesse che possono assumere il valore $-\infty$ sono piuttosto patologiche: se f è convessa, e $f(x_0) = -\infty$ allora, usando il fatto che l'epigrafico è convesso ovvero la disuguaglianza di convessità, segue facilmente che su ogni semiretta uscente da x_0 , cioè su ogni insieme del tipo $\{x_0 + tv : t > 0\}$ con $v \in X \setminus \{0\}$, f può comportarsi solo in uno dei modi seguenti

1. vale costantemente $+\infty$
2. vale costantemente $-\infty$;
3. per un opportuno $t_0 > 0$ si ha

$$f(x_0 + tv) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ +\infty & \text{se } t > t_0 \\ c & \text{se } t = t_0 \end{cases}$$

con $c \in \overline{\mathbb{R}}$ qualunque.

Per evitare queste patologie si introducono le seguenti definizioni.

Definizione 9.6 Una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice propria se non assume mai il valore $-\infty$ e esiste $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) < +\infty$.

Se f è propria, si chiama dominio (effettivo) di f l'insieme

$$\text{dom}(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

Spesso converrà inoltre considerare funzioni convesse a valori in $(-\infty, +\infty]$ o anche solo in \mathbb{R} .

Esercizio 9.7 Si provi che l'estremo superiore di una famiglia arbitraria di funzioni convesse è convessa.

Consideriamo per il momento una funzione convessa di una sola variabile reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Partendo dalla disuguaglianza di convessità

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

con $0 < \lambda < 1$ e $x < y$, posto

$$(9.2) \quad z = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

si ha che $x < z < y$. A questo punto, ricavando λ dalla (9.2) si ha che $\lambda = (y - z)/(y - x)$ mentre $1 - \lambda = (z - x)/(y - x)$. La disuguaglianza di convessità assume allora la forma seguente

$$(9.3) \quad f(z) \leq \frac{y - z}{y - x} f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y),$$

che si può anche scrivere così

$$(9.4) \quad f(z) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (z - x)$$

o così

$$(9.5) \quad f(z) \leq f(y) + \frac{f(x) - f(y)}{x - y}(z - y).$$

La disuguaglianza di convessità, nella forma (9.4), dice che nell'intervallo $[x, y]$ il grafico di f sta al di sotto del segmento congiungente $(x, f(x))$ con $(y, f(y))$. D'altra parte, la (9.4) riscritta nella forma

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

e valendo per qualunque coppia di z e y con $x < z < y$, dice che la funzione rapporto incrementale

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

è crescente (non decrescente) in $(x, +\infty)$ qualunque sia x punto fissato in \mathbb{R} . Cosa possiamo dire in $(-\infty, x)$? Si può osservare che se fissiamo y anziché x , e partiamo dalla (9.5), allora otteniamo che la funzione rapporto incrementale

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

è crescente (non decrescente) in $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ qualunque sia x punto fissato in \mathbb{R} .

Esercizio 9.8 *Dimostrare che f è convessa in X se e solo se per ogni $x, v \in X$ il rapporto incrementale*

$$t \mapsto \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

è una funzione crescente.

Abbiamo già enunciato il teorema di Hahn-Banach che qui ricordiamo.

Teorema 9.9 (Hahn-Banach) *Sia X uno spazio vettoriale normato e M un sottospazio di X (cioè un sottoinsieme di X chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare). Sia*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione lineare e continua. Allora esiste una funzione lineare e continua $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ che estende f e ne conserva la norma.

Il teorema di Hahn-Banach ammette i seguenti corollari (per la dimostrazione vedere ad esempio Brezis [1]).

Corollario 9.10 (Forma geometrica di Hahn-Banach) *Sia X normato. Siano A e B sottoinsiemi di X convessi, non vuoti, disgiunti, con A aperto. Allora A e B si possono separare con un iperpiano chiuso, cioè esistono $T \in X^*$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $A \subseteq \{x \in X : T(x) \leq \alpha\}$ e $B \subseteq \{x \in X : T(x) \geq \alpha\}$.*

Corollario 9.11 (Forma geometrica stretta) *Sia X normato. Siano $A, B \subset X$ convessi, non vuoti, disgiunti, con A chiuso e B compatto. Allora A e B si possono separare strettamente con un iperpiano chiuso, cioè esistono $T \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $A \subseteq \{x \in X : T(x) \leq \alpha - \varepsilon\}$ e $B \subseteq \{x \in X : T(x) \geq \alpha + \varepsilon\}$.*

È particolarmente interessante per i nostri scopi la seguente conseguenza del primo corollario.

Corollario 9.12 *Sia X normato e $E \subset X$ convesso con interno non vuoto. Allora per ogni punto di frontiera di E esiste un iperpiano chiuso, detto iperpiano di appoggio, che separa il punto e l'insieme E*

DIMOSTRAZIONE Sia x_0 il punto di frontiera. Basta applicare il primo corollario alla coppia di sottoinsiemi convessi e non vuoti $A = \overset{\circ}{E}$ e $B = \{x_0\}$. \square

Continuità delle funzioni convesse

Teorema 9.13 *Sia f convessa propria su X . Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

1. f è superiormente limitata in un intorno di un punto x ;
2. f è continua in un punto x ;
3. $(\text{epi}(f))^\circ \neq \emptyset$;
4. $(\text{dom}(f))^\circ \neq \emptyset$ e f è continua in $(\text{dom}(f))^\circ$.

DIMOSTRAZIONE Ioffe e Tihomirov [11], 3.2.3 Theorem 1.

Teorema 9.14 (Disuguaglianza di Jensen) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega| < +\infty$, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ integrabile e $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora vale la disuguaglianza*

$$f\left(\int_{\Omega} \xi(x) dx\right) \leq \int_{\Omega} f(\xi(x)) dx.$$

DIMOSTRAZIONE Poiché f è reale e convessa allora $\text{epi}(f)$ è convesso e ha parte interna non vuota, preso un punto del grafico $(\eta, f(\eta))$ e applicando il corollario 9.12 si ha che esiste un iperpiano di appoggio che separa punto ed epigrafico. Poiché il fascio di iperpiani passante per il punto ha equazione

$$y = f(\eta) + a \cdot (\xi - \eta), \quad a \in \mathbb{R}^m$$

allora quanto affermato si può tradurre come segue

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^m \exists a \in \mathbb{R}^m \text{ tale che } f(\xi) \geq f(\eta) + a \cdot (\xi - \eta) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Scegliendo $\xi = \xi(x)$ e $\eta = \langle \xi \rangle = \int_{\Omega} \xi(x) dx$ si ha

$$f(\xi(x)) \geq f(\langle \xi \rangle) + a \cdot (\xi(x) - \langle \xi \rangle) \quad \forall x \in \Omega,$$

e la tesi segue integrando su Ω . \square

Dimostrazione del teorema di De Giorgi e Ioffe

La prima dimostrazione del teorema 9.3 è stata data nel 1969 da Ennio De Giorgi⁶ [6] nel caso in cui l'integrando $f(x, z, \xi)$ è continuo nella coppia delle variabili (z, ξ) (integrando di Carathéodory), ed esteso al caso più generale da Alexander D. Ioffe [10] nel 1977. La dimostrazione presentata qui, diversa dalle originali, è di De Giorgi, Buttazzo e Dal Maso [7, 2, 4].

L'idea è quella di esprimere la funzione f come estremo superiore di una famiglia numerabile di funzioni per le quali la semicontinuità inferiore sia facile da verificare. Ciò è garantito dal seguente lemma di approssimazione per funzioni convesse.

⁶Lecce 1928 - Pisa 1996. Fu uno dei maggiori matematici italiani della seconda metà del '900. Un'accurata biografia si trova all'indirizzo web <http://cvgmt.sns.it>

Lemma 9.15 Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$ un integrando normale convesso e supponiamo inoltre che f sia superlineare nella variabile ξ , uniformemente rispetto alle altre variabili, cioè che

esista una funzione $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\theta(t)}{t} = +\infty \quad \text{e} \quad f(x, z, \xi) \geq \theta(|\xi|).$$

Allora

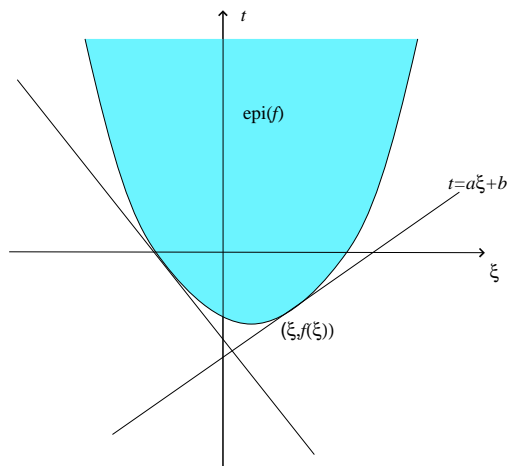
$$f(x, z, \xi) = \sup_{h \in \mathbb{N}} \{a_h(x, z) \cdot \xi + b_h(x, z)\}$$

con $a_h : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $b_h : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ integrandi di Carathéodory limitati.

Per la dimostrazione del lemma, che è molto tecnica rimandiamo a Buttazzo [2] e Dal Maso [5]. Ci limitiamo qui ad osservare che la proprietà stabilita nel lemma è vera nel caso più semplice in cui f dipende solo da ξ e quindi $f : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$ è convessa e s.c.i.. Infatti, poiché f è convessa, il suo epigrafo

$$\text{epi}(f) = \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : t \geq f(\xi)\}$$

è un insieme convesso (è un facile esercizio; cfr. [8], Proposition 2.1). Fissato un punto qualunque $(\xi, f(\xi))$ sul grafico di f , per la forma geometrica del teorema di Hahn-Banach (Corollario 9.10) c'è un iperpiano, di equazione $t = a \cdot \xi + b$, che separa punto ed epigrafo.



Poiché ogni iperpiano è individuato da una coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, in altri termini, l'insieme

$$T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : f(\xi) \geq a \cdot \xi + b, \forall \xi \in \mathbb{R}^k\}$$

è non vuoto e, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^k$, si ha

$$f(\xi) = \sup_{(a,b) \in T} (a \cdot \xi + b).$$

D'altra parte

$$\text{epi}(f) = \mathbb{R}^{k+1} \setminus \bigcup_{(a,b) \in T} \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : t < a \cdot \xi + b\}$$

dove ciascuno degli insiemi di cui si fa l'unione è aperto. Siccome \mathbb{R}^{k+1} ha base numerabile (cioè soddisfa il secondo assioma di numerabilità) allora, per il teorema di Lindelöf ([3], Capitolo terzo, Teorema 6.4) esiste una famiglia numerabile $(a_h, b_h)_{h \in \mathbb{N}}$ di elementi di T tale che

$$\text{epi}(f) = \mathbb{R}^{k+1} \setminus \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : t < a_h \cdot \xi + b_h\},$$

cioè

$$f(\xi) = \sup\{a_h \cdot \xi + b_h : h \in \mathbb{N}\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Notiamo che non si è fatto uso della superlinearità di f .

Dimostrazione del teorema 9.3

Se si potesse scrivere

$$F(u, v) = \sup_{h \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} (a_h(x, u(x)) \cdot v(x) + b_h(x, u(x))) d\mu(x)$$

cioè se si potesse scambiare il sup con l'integrale, allora F risulterebbe semicontinuo inferiormente come estremo superiore di una successione di funzionali s.c.i. In realtà l'identità precedente non vale, ma si può sfruttare l'idea grazie al seguente lemma di localizzazione di De Giorgi, Buttazzo e Dal Maso.

Lemma 9.16 *Sia (g_h) una successione di funzioni di $L^1(\Omega)$ e sia $g = \sup_{h \in \mathbb{N}} g_h$. Allora*

$$\int_{\Omega} g d\mu = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{(B_i^N)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i^N} g_i d\mu$$

dove il secondo estremo superiore è fatto sulle partizioni $(B_i^N) := \{B_i^N : i = 1, \dots, N\}$ di Ω costituite da N elementi della σ -algebra \mathcal{F} .

DIMOSTRAZIONE Poiché $g \geq g_i$ per ogni i , la disuguaglianza

$$\int_{\Omega} g d\mu \geq \sup_N \sup_{(B_i^N)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i} g_i d\mu$$

è banale. Proviamo quella opposta. Sia $f_N = \max\{g_1, \dots, g_N\}$. La successione $(f_N)_N$ converge crescendo a g , ed il teorema di convergenza monotona⁷ (Beppo-Levi) implica

$$\int_{\Omega} g d\mu = \sup_N \int_{\Omega} f_N d\mu.$$

Basterà quindi dimostrare che per ogni N

$$(9.6) \quad \int_{\Omega} f_N d\mu \leq \sup_{(B_i^N)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i} g_i d\mu$$

dove l'estremo superiore è fatto sulle partizioni finite (B_i^N) di Ω costituite da N elementi della σ -algebra \mathcal{F} . Ora, per la misurabilità delle g_h , è un semplice esercizio mostrare che esiste una partizione di questo tipo tale che $f_N = g_i$ μ -q.o. su B_i per ogni $i = 1, \dots, N$.⁸ Segue la (9.6). \square

⁷Vedere ad esempio [13], Teorema 1.26 o [9], Capitolo sesto, Teorema 4.1.

⁸Infatti gli insiemi $D_i^N = \{x \in \Omega : f_N(x) = g_i(x)\}$, $i = 1, \dots, N$, sono misurabili, ma in generale non disgiunti; basta allora definire $B_1^N = D_1^N$, $B_2^N = D_2^N \setminus B_1^N$, $B_3^N = D_3^N \setminus (B_1^N \cup B_2^N)$ e così via.

Applicando il lemma alle funzioni $g_h(x) := a_h(x, u(x)) \cdot v(x) + b_h(x, u(x))$ si ottiene per F la rappresentazione

$$(9.7) \quad F(u, v) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{(B_i^N)} \sum_{i=1}^N \int_{B_i^N} (a_h(x, u(x)) \cdot v(x) + b_h(x, u(x))) d\mu(x).$$

L'applicazione del lemma è però subordinata alla verifica dell'ipotesi $g_h \in L^1(\Omega)$. Poiché le g_h sono limitate (per la limitatezza di a_h e b_h) è sufficiente mostrare che le g_h sono misurabili e questo segue dal fatto che a_h e b_h sono di Carathéodory.⁹

Dunque F ammette la rappresentazione (9.7). A questo punto è sufficiente mostrare che se $a(x, z)$ e $b(x, z)$ sono integrandi di Carathéodory limitati su $\Omega \times \mathbb{R}^m$ ed E è un sottoinsieme misurabile di Ω , allora il funzionale

$$G(u, v) = \int_E (a(x, u(x)) \cdot v(x) + b(x, u(x))) d\mu(x)$$

è seq. s.c.i. rispetto alla convergenza forte $L^1(E; \mathbb{R}^m)$ di u e debole $L^1(E; \mathbb{R}^k)$ di v .

Siano $u_j \rightarrow u$ in $L^1(E; \mathbb{R}^m)$ e $v_j \rightharpoonup v$ in $L^1(E; \mathbb{R}^k)$. Allora esiste una sottosuccessione u_{j_ν} che converge quasi ovunque e, per il teorema della convergenza dominata si ha

$$\int_E b(x, u(x)) d\mu(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_E b(x, u_{j_\nu}(x)) d\mu(x).$$

Poiché ciò vale non solo per (u_j) ma per qualunque sua sottosuccessione ne consegue che (esercizio)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E b(x, u_j(x)) d\mu(x) = \int_E b(x, u(x)) d\mu(x).$$

Per dimostrare che anche

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E a(x, u_j(x)) \cdot v_j(x) d\mu(x) = \int_E a(x, u(x)) \cdot v(x) d\mu(x)$$

e concludere quindi che G è addirittura continuo, osserviamo che per poter passare al limite nel prodotto avendo v_j convergente debolmente in L^1 occorrerebbe che la successione $g_j(x) = a(x, u_j(x))$ convergesse fortemente in L^∞ (cioè uniformemente), ma poiché u_j converge solo in L^1 questo in generale non accade. In effetti, tuttavia, per passare al limite basta che $g_j \rightarrow g$ *quasi uniformemente* in E , cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un misurabile $A_\varepsilon \subseteq E$ tale che $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ e $g_j \rightarrow g$ uniformemente in $E \setminus A_\varepsilon$.

La convergenza quasi-uniforme, nel nostro caso, è garantita dal seguente teorema.

Teorema 9.17 (Severini-Egorov) *Sia E un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^k con $\mu(E) < \infty$. Sia (g_j) una successione di funzioni misurabili e finite quasi-ovunque su E . Se g_j converge quasi ovunque in E ad una funzione misurabile e finita g , allora $g_j \rightarrow g$ quasi-uniformemente.*

Vale dunque il seguente lemma.

⁹In generale, se $a : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è di Carathéodory e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile allora la funzione composta $x \mapsto a(x, u(x))$ risulta misurabile. Infatti è facile verificare che ciò è vero se u è una funzione semplice, cioè combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi misurabili di Ω . Se u è misurabile, è ben noto (Rudin [13], Teorema 1.17 applicato alla parte positiva e alla parte negativa di u) che esiste una successione u_n di funzioni semplici che converge a u quasi ovunque. Per la continuità di a rispetto alla seconda variabile si allora che $a(x, u_n(x)) \rightarrow a(x, u(x))$ quasi ovunque e la tesi segue dal fatto che il limite quasi ovunque di una successione di funzioni misurabili è misurabile.

Lemma 9.18 *Siano (g_j) una successione limitata in $L^\infty(E; \mathbb{R}^k)$ e (v_j) successione in $L^1(E; \mathbb{R}^k)$ tali che*

$$g_j \rightarrow g \text{ quasi ovunque in } E;$$

$$v_j \rightarrow v \text{ in } L^1(E; \mathbb{R}^k).$$

Allora

$$\int_E g \cdot v \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E g_j \cdot v_j \, d\mu.$$

Per completare la dimostrazione dobbiamo rimuovere l'ipotesi di superlinearità di f in ξ . Fissiamo due successioni $u_j \rightarrow u$ in L^1 e $v_j \rightarrow v$ in L^1 . La (v_j) costituisce un sottoinsieme relativamente debolmente compatto in L^1 e quindi soddisfa la condizione di De la Vallée - Poussin, cioè esiste una $\theta : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ superlineare e convessa tale che

$$\sup_j \int_\Omega \theta(|v_j|) \, d\mu \leq 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$f(x, z, \xi) + \varepsilon \theta(|\xi|)$$

soddisfa tutte le condizioni del teorema compresa la superlinearità. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x, u, v) \, d\mu &\leq \int_\Omega (f(x, u, v) + \varepsilon \theta(|v|)) \, d\mu \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_\Omega (f(x, u_j, v_j) + \varepsilon \theta(|v_j|)) \, d\mu \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_\Omega f(x, u_j, v_j) \, d\mu + \varepsilon \int_\Omega \theta(|v_j|) \, d\mu \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_\Omega f(x, u_j, v_j) \, d\mu + \varepsilon \end{aligned}$$

e la tesi si ottiene allora facendo tendere ε a zero. Il teorema è così completamente dimostrato. \square

9.1 Condizioni necessarie per la semicontinuità

Se la misura μ è non atomica¹⁰ allora la condizione che l'integrando f sia normale convesso è anche necessaria (oltre che sufficiente) per la semicontinuità del funzionale $F(u, v)$ del teorema 9.3. Vale infatti il seguente teorema di Olech [12].

Teorema 9.19 *Supponiamo che la misura μ oltre che finita e completa sia anche non atomica, e sia $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$ un integrando. Se il funzionale*

$$F(u, v) = \int_\Omega f(x, u(x), v(x)) \, d\mu(x)$$

è ben definito su $L^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \times L^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$ a valori in $[0, +\infty[$ e s.c.i. rispetto alla convergenza forte di $L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ nella variabile u e a quella debole di $L^1(\Omega; \mathbb{R}^k)$ nella variabile v , allora f è un integrando normale convesso.

¹⁰Cioè per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) > 0$ esiste $B \subset E$, $B \in \mathcal{F}$, tale che $0 < \mu(B) < \mu(E)$.

Osservazione 9.20 L'ipotesi che μ sia non atomica non si può eliminare, infatti presi due elementi distinti x_1 e x_2 di Ω e $\mu = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$, allora $L_\mu^1(\Omega)$ è identificabile con \mathbb{R}^2 ; infatti la funzione $T : L_\mu^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F[\varphi] = (\varphi(x_1), \varphi(x_2))$ è un'omeomorfismo lineare. Poiché esistono funzioni s.c.i. su \mathbb{R}^2 che non sono convesse, le conclusioni del teorema non valgono in questo caso.

Osserviamo anche che dal teorema precedente non segue in generale che se

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx$$

è debolmente s.c.i. in $W^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ allora l'integrando f è convesso nella variabile gradiente, perchè non tutte le funzioni $v \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^{nm})$ sono gradienti di qualche funzione di $L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$,¹¹ a meno che non sia $n = 1$.

Tuttavia si dimostra che nei casi scalari (cioè non solo per $n = 1$ in cui la variabile x è scalare ma anche per $m = 1$ in cui $u(x)$ è scalare) la convessità del funzionale nella variabile gradiente oltre che essere condizione sufficiente per la semicontinuità è anche necessaria. Vale ad esempio il teorema seguente.

Teorema 9.21 Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n ed $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un integrando di Carathéodory. Sia $p \in [1, +\infty[$. Supponiamo che esistano una funzione $a \in L^1(\Omega)$ ed una costante $b > 0$ tali che

$$|f(x, \xi)| \leq a(x) + b|\xi|^p.$$

Consideriamo il funzionale $F : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx.$$

Se F è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente allora per q.o. $x \in \Omega$ la funzione $\xi \rightarrow f(x, \xi)$ è convessa.

Bibliografia

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
- [2] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.
- [3] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.
- [4] G. Dal Maso, *An introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [5] ———, *Problemi di semicontinuità e rilassamento nel calcolo delle variazioni*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana **39** (1995), 145–196.
- [6] E. De Giorgi, *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Lezioni tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, a.a. 1968-69 Roma, 1969.

¹¹Ricordiamo che già se $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ (caso particolare $m = 1$) una condizione necessaria affinché esista φ tale che $v = D\varphi$ è che $\text{rot } v = 0$. Ad esempio, nel caso $n = 2$, $m = 1$, la funzione $v(x_1, x_2) = (1, x_1)$ non è gradiente di alcuna funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Infatti, se per assurdo lo fosse, cioè esistesse φ tale che $1 = D_1\varphi$ e $x_1 = D_2\varphi$ allora, per il teorema del differenziale totale φ sarebbe di classe C^2 e si avrebbe $D_2(D_1\varphi) = 0 \neq 1 = D_1(D_2\varphi)$ contro il teorema di Schwartz sull'inversione dell'ordine di derivazione. Osserviamo che in tale caso $\text{rot } v = D_2v_1 - D_1v_2 = D_21 - D_1(x_1) = -1 \neq 0$.

- [7] E. De Giorgi, G. Buttazzo, and G. Dal Maso, *On the lower semicontinuity of certain integral functionals*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **74** (1983), no. 5, 274–282.
- [8] I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North Holland, Amsterdam, 1976.
- [9] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.
- [10] A.D. Ioffe, *On lower semicontinuity of integral functionals i, ii*, SIAM J. Control Optim. **15** (1977), 521–538, 991–1000.
- [11] A.D. Ioffe and V.M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Studies in Mathematics and its Applications, 6, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.
- [12] C. Olech, *A characterization of L^1 -weak lower semicontinuity of integral functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), 135–142.
- [13] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.