

Capitolo 8

Spazi di Sobolev

Definizioni e proprietà topologiche

Per tutta la lezione, se non altrimenti specificato, tutte le derivate si intendono in senso distribuzionale, Ω indicherà un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq +\infty$.

Lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ è definito da

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D_\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq m\}.$$

Se $m = 0$ si ha $W^{m,p} = L^p$. Lo spazio vettoriale $W^{m,p}(\Omega)$ potrà essere munito della norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } p < +\infty,$$

oppure

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{se } p = +\infty,$$

o altre norme equivalenti.

Teorema 8.1 ($W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p}$) è uno spazio

1. di Banach per $1 \leq p \leq +\infty$,
2. riflessivo per $1 < p < +\infty$,
3. separabile per $1 \leq p < +\infty$.

1. Sia (u_h) una successione di Cauchy in $W^{m,p}$; allora $(D^\alpha u_h)$ è di Cauchy in L^p per $|\alpha| \leq m$. Di conseguenza, poiché L^p è completo, esistono delle funzioni u e u_α , $0 < |\alpha| \leq m$, in L^p tali che $u_h \rightarrow u$ e $D^\alpha u_h \rightarrow u_\alpha$ in L^p . Per ottenere la tesi basta provare che, per tali α , si ha $u_\alpha = D_\alpha u$ in L^p .

Poiché $L^p \subset L^1_{\text{loc}}$ le (u_h) individuano una distribuzione $T_{u_h} \in \mathcal{D}'$ che d'ora in poi continueremo ad indicare con u_h . Nel senso delle distribuzioni si ha, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(8.1) \quad \langle D_\alpha u_h, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_h, D_\alpha \varphi \rangle$$

e, poiché la convergenza forte in L^p implica la debole e la debole implica la convergenza in \mathcal{D}' (mostrarlo per esercizio), allora, passando al limite per $h \rightarrow \infty$ nella (8.1), si ha che

$$\langle u_\alpha, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D_\alpha \varphi \rangle;$$

d'altra parte, per definizione di derivata distribuzionale il secondo membro è uguale a $\langle D_\alpha u, \varphi \rangle$ per cui si ha

$$\langle u_\alpha, \varphi \rangle = \langle D_\alpha u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

cioè $u_\alpha = D_\alpha u$ in \mathcal{D}' , e la tesi segue dall'iniettività dell'immersione di L^1_{loc} in \mathcal{D}' . \square

2. Sia $N = N(n, m) = \sum_{|\alpha| \leq m} 1$ il numero di multi-indici $\alpha \in \mathbb{N}^n$ che soddisfano la condizione $|\alpha| \leq m$. Poichè $L^p(\Omega)$ è riflessivo per $1 < p < +\infty$ allora anche lo spazio prodotto $E = L^p(\Omega)^N$ è riflessivo. L'operatore $T : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow E$ definito da $Tu = (D^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}$, ove i multi-indici α si suppongono convenientemente ordinati, è un'isometria lineare e iniettiva da $W^{m,p}(\Omega)$ in E con la norma $\|v\|_E = (\sum_{j=1}^N \|v_j\|_p^p)^{1/p}$. Poichè $W^{m,p}(\Omega)$ è completo allora anche $T(W^{m,p}(\Omega))$ è completo. Ora, ogni sottospazio completo di uno spazio metrico è anche chiuso (dimostrarlo per esercizio o vedere [3], Capitolo sesto, Proposizione 2.6), quindi $M = T(W^{m,p}(\Omega))$ è un sottospazio vettoriale chiuso di E . Consideriamo una palla chiusa B_E in E . Poichè E è riflessivo allora B_E è debolmente compatta. Ora $B_E \cap M$ è una palla chiusa in M e risulta debolmente compatta in M . Ne consegue che $M = T(W^{m,p}(\Omega))$ è riflessivo per il teorema di Kakutani, e di conseguenza anche $W^{m,p}(\Omega)$ lo è.

3. Mostriamo che $W^{m,p}(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < +\infty$. Poichè $L^p(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < +\infty$ allora anche $E = L^p(\Omega)^N$ è separabile. Introduciamo l'operatore T definito come al punto precedente; allora $T(W^{m,p}(\Omega))$ è separabile e di conseguenza anche $W^{m,p}(\Omega)$ lo è (vedi ad esempio Adams [1], Theorem 1.21, che avrebbe potuto essere usato anche al punto precedente). \square

Osservazione 8.2 In particolare $W^{m,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{W^{m,2}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D_\alpha u, D_\alpha v \rangle_{L^2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D_\alpha u D_\alpha v \, dx.$$

Dualità

Ricordiamo che, se $1 \leq p < +\infty$, le funzioni di L^p si possono approssimare con funzioni C_c^∞ . In $W^{m,p}$ con $m > 0$ questa cosa risulta generalmente impossibile. Per rendersene conto basta cercare di approssimare in una funzione costante diversa da zero nel caso $n = m = p = 1$, $\Omega = (0, 1)$.

Indichiamo con $W_0^{m,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ con la topologia della norma. Scriveremo anche

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Si ha che $(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ è completo, e quindi di Banach, in quanto è un sottospazio chiuso dello spazio completo $W^{m,p}(\Omega)$. I due spazi coincidono se $p < \infty$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ oppure $m = 0$.

Osservazione 8.3 Ricordiamo che se $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ allora $D_\alpha v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, cioè

$$D_\alpha v : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

è lineare e continua quando su C_c^∞ si considera la topologia di \mathcal{D} . Considerato che $C_c^\infty \subset W_0^{m,p}$ allora in C_c^∞ si può considerare la topologia indotta da $W_0^{m,p}$ rispetto alla quale $D_\alpha v$ è continua se $v \in L^{p'}$ e $|\alpha| \leq m$. Infatti, presa $\varphi_j \in C_c^\infty$, $\varphi_j \rightarrow \varphi$ in $W_0^{m,p}$, si ha

$$\langle D_\alpha v, \varphi_j \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle v, D_\alpha \varphi_j \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle v, D_\alpha \varphi \rangle = \langle D_\alpha v, \varphi \rangle,$$

dal momento che se $|\alpha| \leq m$ allora la convergenza in $W_0^{m,p}$ implica che $D_\alpha \varphi_j \rightarrow D_\alpha \varphi$ in L^p e la convergenza forte implica la debole.

Supponiamo da ora in poi, che $v \in L^{p'}(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$. Per il teorema di Hahn-Banach, allora, la distribuzione $D_\alpha v$ si può estendere ad una funzione lineare e continua su $W_0^{m,p}$ con la topologia della norma. Inoltre l'estensione è unica per la densità di C_c^∞ in $W_0^{m,p}$. Infatti, indicate con T_1 e T_2 due possibili estensioni e presa $u \in W_0^{m,p}$ allora esiste una successione $\psi_j \in \mathcal{D}$ tale che $\|\psi_j - u\|_{m,p} \rightarrow 0$. Inoltre per ogni j si ha $T_1(\psi_j) = T_2(\psi_j) = \langle D_\alpha v, \psi_j \rangle$ e passando al limite per $j \rightarrow \infty$ si ottiene, per unicità del limite, che $T_1(u) = T_2(u)$.

Ne consegue che $D_\alpha v$ individua univocamente un elemento di $W_0^{m,p}(\Omega)^*$. Trattandosi di uno spazio vettoriale, sono elementi di $W_0^{m,p}(\Omega)^*$ anche tutte le distribuzioni della forma

$$w = \sum_{|\alpha| \leq m} D_\alpha v_\alpha, \quad v_\alpha \in L^{p'}(\Omega).$$

In effetti si potrebbe dimostrare che tutti gli elementi di $W_0^{m,p}(\Omega)^*$ si possono scrivere in questo modo (Adams [1], Theorem 3.8 e osservazione 3.9).

Per quanto ora osservato, denotiamo con $W^{-m,p'}(\Omega)$ lo spazio duale di $W_0^{m,p}(\Omega)$, e vale la seguente caratterizzazione

$$w \in W^{-m,p'}(\Omega) \iff w = \sum_{|\alpha| \leq m} D_\alpha v_\alpha \text{ con } v_\alpha \in L^{p'}(\Omega).$$

Si osservi inoltre che per avere l'unicità dell'estensione è stata usata la densità di C_c^∞ che sussiste in $W_0^{m,p}(\Omega)$ ma non in $W^{m,p}(\Omega)$, a meno che i due spazi non coincidano. Ne consegue che, in generale, non ci si può aspettare che il duale di $W^{m,p}(\Omega)$, che è incluso in $W^{-m,p'}(\Omega)$, ammetta una caratterizzazione altrettanto semplice nel caso in cui $W_0^{m,p}(\Omega)$ sia un sottospazio proprio di $W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{-m,p'}(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo e separabile se $1 < p < \infty$ e la norma indotta dalla dualità risulta equivalente alla seguente

$$\|w\|_{-m,p'} = \inf \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|v_\alpha\|_{p'} : v_\alpha \in L^{p'} \text{ e } w = \sum_{|\alpha| \leq m} D_\alpha v_\alpha \right\}$$

Approssimazione con funzioni regolari

Vale il seguente teorema di approssimazione; per la dimostrazione si può vedere Adams [1], Theorem 3.16.

Teorema 8.4 (di Meyers-Serrin ($H = W$)) *Sia $1 \leq p < +\infty$. Per ogni $u \in W^{m,p}(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $u_h \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\|u - u_h\|_{m,p} \rightarrow 0$ per $h \rightarrow +\infty$.*

Dal teorema segue che la chiusura dell'insieme $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ in $W^{m,p}(\Omega)$ è tutto lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$. In altri termini, le funzioni C^∞ sono dense in $W^{m,p}$. Il teorema di Meyers-Serrin è del 1964. Prima di allora questo risultato di chiusura non era noto e quindi si usava un altro simbolo, $H^{m,p}(\Omega)$, per indicare il completamento di $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p}$. Il teorema afferma quindi che $H = W$ (questo è anche il titolo che gli autori hanno dato all'articolo in cui pubblicarono il risultato, [6]).

Osservazione 8.5 Notiamo che il teorema $H = W$ non vale per $p = \infty$. Infatti la funzione $|x|$ appartiene a $W^{1,\infty}(-1,1)$ ma non può essere approssimata da funzioni regolari nella norma di $W^{1,\infty}(-1,1)$ che implica la convergenza uniforme delle derivate.

Aperti regolari e teoremi di immersione

Altre proprietà di approssimazione e di immersione valgono solo nel caso in cui l'aperto Ω e la sua frontiera $\partial\Omega$ soddisfano ad opportune proprietà di regolarità.

Definizione 8.6 *Si dice che Ω ha frontiera localmente lipschitziana se la frontiera $\partial\Omega$ è localmente grafico di una funzione lipschitziana, cioè se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno $U_x \in \mathcal{U}_x$ tale che $\partial\Omega \cap U_x$ è grafico di una funzione lipschitziana.*

Enunciamo il seguente teorema di immersione di Sobolev supponendo che Ω sia limitato. Questa ipotesi non è essenziale e si può rimuovere a costo di rafforzare l'ipotesi di regolarità sostituendola con la cosiddetta *proprietà di lipschitzianità locale forte* la cui formulazione però risulta molto più complicata (cfr. ad esempio [1], 4.5). Per semplicità consideriamo inoltre solamente il caso $m = 1$. Rinviamo ad Adams [1] e Brezis [2] per gli analoghi teoremi nel caso $m > 1$.

Con il termine *immersione* si intende un'applicazione di inclusione continua. Un'immersione si dice *compatta* se mappa insiemi limitati in relativamente compatti (in termini di successioni significa che da ogni successione limitata nel dominio è possibile estrarre una sottosuccessione convergente nel codominio).

Teorema 8.7 (Sobolev e Rellich) *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n con $\partial\Omega$ localmente lipschitziana se $n > 1$ oppure un intervallo nel caso $n = 1$.*

Valgono le seguenti immersioni:

1. se $p < n$ allora $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q \leq \frac{np}{n-p}$ e l'immersione è compatta se $q < \frac{np}{n-p}$;
2. se $p = n$ allora $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $q < \infty$ e l'immersione è compatta;
3. se $p > n$ allora $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ e l'immersione è compatta.

Osservazione 8.8 L'immersione in 3 va intesa nel senso dell'esistenza di un rappresentante $C(\bar{\Omega})$ nella classe di equivalenza di $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Essa può essere migliorata nel senso che lo spazio $C(\bar{\Omega})$ può essere sostituito da spazi di funzioni hölderiane.

Osservazione 8.9 Se al posto di $W^{1,p}(\Omega)$ si considera $W_0^{1,p}(\Omega)$ si può togliere l'ipotesi $\partial\Omega$ lipschitziana.

Osservazione 8.10 Nella 1 si ha sempre $p^* := \frac{np}{n-p} > p$. p^* è detto *esponente di Sobolev*.

Osservazione 8.11 La continuità delle immersioni si traduce nelle seguenti relazioni tra le norme

- nei casi 1 e 2: $\|u\|_q \leq C\|u\|_{1,p}$,
- nel caso 3: $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{1,p}$.

per opportune costanti C .

Il caso della dimensione 1

Nel caso $n = 1$ ed in particolare se $\Omega = I$ è un intervallo, allora dalla 3 si ha che

1. se $p = 1$ allora $W^{1,1}(I) \rightarrow L^q(I)$ per ogni $q < \infty$ e l'immersione è compatta;
2. se $p > 1$ allora $W^{1,p}(I) \rightarrow C(\bar{I})$ e l'immersione è compatta.

Nel caso 1-dimensionale, vale in più la seguente ulteriore importante proprietà.

Teorema 8.12 *Sussiste la seguente immersione (non compatta)*

$$W^{1,1}(I) \rightarrow C(\bar{I})$$

nel senso che per ogni $u \in W^{1,1}(I)$ esiste una funzione (unica) $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tale che $\tilde{u} = u$ q.o. su I . Vale inoltre la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y \tilde{u}'(t) dt.$$

Osservazione 8.13 In particolare si ha che u è limitata e

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{1,1}.$$

Alla dimostrazione del teorema 8.12 premetteremo un paio di lemmi. Cominciamo con l'osservare che esistono funzioni $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ tali che

- A) f è derivabile quasi ovunque con derivata nulla;
- B) $f' \neq 0$ in $\mathcal{D}'(I)$.

Tra gli esempi più semplici vi sono le funzioni costanti a tratti non costanti. In particolare A) non implica che $f = \text{costante}$ quasi ovunque, come invece accadrebbe se f fosse derivabile in ogni punto di I e non solo quasi ovunque. Il seguente lemma mostra che, viceversa, se $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ e $f' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$ allora f è costante quasi ovunque.

Lemma 8.14 *Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ tale che $f' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$. Allora esiste una costante C tale che $f = C$ quasi ovunque in I .*

DIMOSTRAZIONE Poiché $f' = 0$ in $\mathcal{D}'(I)$ allora

$$\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Basta provare che esiste C tale che

$$\int_I (f - C)\psi = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Fissiamo una funzione $w \in \mathcal{D}(I)$ tale che $\int_I w = 1$. Per ogni $\psi \in \mathcal{D}(I)$ sia

$$h := \psi - \left(\int_I \psi\right)w.$$

Chiaramente si ha $h \in \mathcal{D}(I)$ e $\int_I h = 0$. Allora esiste $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ tale che $\varphi' = h$ (basta prendere la funzione integrale con primo estremo di integrazione coincidente con uno dei due estremi di I). Ne consegue che

$$0 = \int_I fh = \int_I f[\psi - (\int_I \psi)w] = \int_I [f - (\int_I fw)]\psi.$$

Poiché quest'ultima vale per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ segue la tesi con $C = \int_I fw$. \square

Quando la derivabilità è intesa in senso distribuzionale il teorema fondamentale del calcolo integrale, che vale classicamente per le funzioni continue, si generalizza alle funzioni L^1_{loc} come stabilito dal seguente lemma, che si applica ad esempio anche alla funzione segno (che mostra che la continuità è essenziale quando la derivabilità è classica).

Lemma 8.15 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Fissato $x_0 \in I$ consideriamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Allora $F \in C(I)$ ($F \in C(\bar{I})$ se $f \in L^1(I)$) e si ha $F' = f$ in $\mathcal{D}(I)$.

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione della continuità di F è una semplice applicazione del teorema di Lebesgue della convergenza dominata.¹ Proviamo la formula di derivazione. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, e supponendo che $I = (a, b)$, si ha

$$\begin{aligned} \langle F', \varphi \rangle &= -\langle F, \varphi' \rangle = -\int_I F(x) \varphi'(x) dx = -\int_a^b \int_{x_0}^x f(t) dt \varphi'(x) dx \\ &= +\int_a^{x_0} \int_x^{x_0} f(t) dt \varphi'(x) dx - \int_{x_0}^b \int_{x_0}^x f(t) dt \varphi'(x) dx \\ &= +\int_a^{x_0} \int_a^t \varphi'(x) dx f(t) dt - \int_{x_0}^b \int_t^b \varphi'(x) dx f(t) dt \\ &= +\int_a^{x_0} \varphi(t) f(t) dt + \int_{x_0}^b \varphi(t) f(t) dt = \langle f, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

dove l'ordine di derivazione è stato scambiato usando il teorema di Fubini. Segue la tesi. \square

Osservazione 8.17 Il teorema ora provato dice che la primitiva di una funzione $f \in L^p(I)$ è in $W^{1,p}(I)$ purché sia noto che $F \in L^p(I)$. Ciò accade sempre se I è limitato (per la disuguaglianza di Hölder²).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.12 Fissato $x_0 \in I$ poniamo

$$\bar{u}(x) = \int_{x_0}^x u'(t) dt.$$

Per il lemma 8.15 si ha $\bar{u} \in C(\bar{I})$ e $\bar{u}' = u'$ in $\mathcal{D}(I)$, cioè $(\bar{u} - u)' = 0$ in $\mathcal{D}(I)$, da cui, per il lemma 8.14 segue che $\bar{u} - u = C$ quasi ovunque e la tesi segue allora prendendo $\tilde{u} := \bar{u} - C$. \square

Osservazione 8.19 L'immersione del teorema 8.12 non è suriettiva, cioè esiste una funzione uniformemente continua che non appartiene a $W^{1,1}$. In particolare esiste una funzione $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ che è continua, strettamente crescente e quindi derivabile

1

Teorema 8.16 (Lebesgue) Sia (f_h) una successione di funzioni integrabili su Ω e tali che

1. $\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x) = f(x)$ q.o. $x \in \Omega$,
2. $\exists \varphi \in L^1(\Omega)$ tale che $|f_h(x)| \leq \varphi(x)$ q.o. $x \in \Omega$.

Allora

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_E f_h(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

2

Teorema 8.18 Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $p, p' \in [1, +\infty]$ esponenti coniugati, allora $fg \in L^1(\Omega)$ e vale la disuguaglianza di Hölder $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

quasi ovunque, con derivata quasi ovunque nulla in $(0, 1)$ (esempio di Vitali, vedi Hewitt-Stromberg [5], Example (18.8)). Ne consegue che $F \notin W^{1,1}(0, 1)$ perchè se vi appartenesse allora sarebbe $F' \in L^1$ e quindi $F' = 0$ come distribuzione e allora, per il lemma 8.14 F sarebbe costante (ovunque in quanto continua).

Lo spazio delle funzioni $W^{1,1}(I)$, primitive delle funzioni integrabili secondo Lebesgue, non si identifica quindi con tutto lo spazio delle funzioni uniformemente continue $C(\bar{I})$, ma con un suo sottoinsieme proprio. Si potrebbe dimostrare che questo sottoinsieme coincide con la classe $AC(I)$ delle funzioni *assolutamente continue*. Ricordiamo che, per definizione, una funzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice assolutamente continua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita di intervalli due a due disgiunti $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, \dots, m$, tali che

$$\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) < \delta$$

si ha

$$\sum_{i=1}^m |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

Convergenza debole

Dalla caratterizzazione del duale di $W_0^{1,p}$ e dalla compattezza delle immersioni segue che la convergenza debole negli spazi $W^{1,p}$ è caratterizzabile nel modo seguente quando Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n con $\partial\Omega$ localmente lipschitziana se $n > 1$ oppure un intervallo nel caso $n = 1$

- caso $1 \leq p < \infty$: $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega) \iff u_n \rightarrow u$ e $Du_n \rightharpoonup Du$ in L^p ;
- caso $p = \infty$: $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,\infty}(\Omega) \iff u_n \rightarrow u$ e $Du_n \overset{*}{\rightharpoonup} Du$ in L^∞ .

Dimmostrarlo per esercizio nel caso $1 < p \leq \infty$.

Traccia sul bordo

Consideriamo il semispazio $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n \geq 0\}$. La sua frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ è l'iperpiano di \mathbb{R}^n di equazione $x_n = 0$, che nel seguito identificheremo con \mathbb{R}^{n-1} .

Lemma 8.20 *L'applicazione*

$$\begin{aligned} \gamma : C_c^1(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^p(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma(u) = u|_\Gamma(x') = u(x', 0) \end{aligned}$$

è lineare e continua rispetto a $\|\cdot\|_{1,p}$ in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e a $\|\cdot\|_p$ in $L^p(\Gamma)$.

DIMOSTRAZIONE La linearità è banale. Per provare la continuità dobbiamo mostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che $\|u|_\Gamma\|_p \leq C\|u\|_{1,p}$ per ogni $u \in L^p(\Gamma)$. Osserviamo a tal scopo che

$$\|u|_\Gamma\|_p = \left(\int_\Gamma |u(x', 0)|^p dx' \right)^{1/p}.$$

Osserviamo poi che, poichè la funzione $G(t) := |t|^{p-1}t$ è derivabile in ogni punto con derivata $G'(t) = p|t|^{p-1}$ (a differenza di $|t|^p$ che può non essere derivabile in 0) allora

$$\begin{aligned} |u(x', 0)|^{p-1}u(x', 0) &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [|u(x', s)|^{p-1}u(x', s)] ds = - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} G(u(x', s)) ds \\ &= - \int_0^\infty G'(u(x', s)) \frac{\partial u}{\partial s}(x', s) ds = - \int_0^\infty p|u(x', s)|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial s}(x', s) ds. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} |u(x', 0)|^p &= ||u(x', 0)|^{p-1}u(x', 0)| \leq p \int_0^\infty |u(x', s)|^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial s}(x', s) \right| ds \leq \\ &\leq C \left[\int_0^\infty |u(x', s)|^p ds + \int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial s}(x', s) \right|^p ds \right]. \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio è stata usata la disuguaglianza di Young

$$ab \leq \frac{a^{p'}}{p'} + \frac{b^p}{p}$$

che vale per ogni $a, b \geq 0$ e $p, p' \in (1, +\infty)$ esponenti coniugati. La tesi segue integrando ambo i membri in x' su \mathbb{R}^{n-1} . \square

Per il lemma, il teorema di Hahn-Banach e la densità di $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, l'applicazione γ si prolunga in modo unico ad un operatore lineare e continuo

$$\gamma : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\Gamma)$$

detto *traccia* di u su Γ e denotato col simbolo $u|_\Gamma$. Per la continuità esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u|_\Gamma\|_p \leq C \|u\|_{1,p} \quad \text{per ogni } u \in L^p(\Gamma),$$

detta *disuguaglianza di traccia*.

Osservazione 8.21 Osserviamo che lo stesso ragionamento non funziona sostituendo la norma p a quella $(1, p)$, perchè non si riesce a controllare la norma della derivata di u con la norma p di u . Una differenza fondamentale tra $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$ è che in $L^p(\Omega)$ non ha senso parlare di traccia su $\partial\Omega$.

Possiamo immaginare ora come si potrebbe definire la traccia su $\Gamma = \partial\Omega$ di una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ quando Ω è un aperto "abbastanza regolare" di \mathbb{R}^n , ad esempio una varietà di classe C^1 , servendosi di un'atlante di carte locali. In tal caso $u|_\Gamma \in L^p(\Gamma)$ dove la misura su Γ è quella indotta dalla struttura di varietà o elementarmente definita (misura superficiale $d\sigma$) su Γ , ovvero la misura di Hausdorff $(n-1)$ -dimensionale (\mathcal{H}^{n-1}).

L'operatore di traccia γ non è suriettivo, cioè $\gamma(W^{1,p}(\Omega)) \subset L^p(\Gamma)$ e l'inclusione è stretta. Per descriverne l'immagine occorre introdurre spazi di Sobolev con indice di derivazione frazionario. Tra i vari modi di farlo vi è il seguente (cfr. Brezis [2], Commentaires sur le chapitre IX, 6). Per $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in (0, 1)$ si definisce

$$W^{m+\sigma,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) : \frac{|D_\alpha u(x) - D_\alpha u(y)|}{|x-y|^{\sigma+\frac{n}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \quad \forall |\alpha| = m \right\}$$

con la norma

$$\|u\|_{m+\sigma,p} = \left(\|u\|_{m,p}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D_\alpha u(x) - D_\alpha u(y)|}{|x-y|^{\sigma+\frac{n}{p}}} dx dy \right)^{1/p}.$$

Se Ω è limitato e con frontiera localmente lipschitziana, allora l'operatore

$$\begin{aligned} \gamma : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{1-1/p,p}(\Gamma) \\ u &\mapsto u|_\Gamma \end{aligned}$$

è lineare, continuo e suriettivo (cfr. Nečas [7], Théoreme 5.7); il suo nucleo è $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Valgono inoltre le formule di Green ([7], Théoreme 1.1)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_{\Gamma} u v n_i \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \quad \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega), \quad i = 1, \dots, n$$

dove \mathbf{n} denota il versore normale esterno a Γ , che per Γ localmente lipschitziana esiste \mathcal{H}^{n-1} -quasi ovunque ([7], Lemme 4.2);

Per funzioni $u, v \in W^{2,2}(\Omega)$ e Ω di classe C^1 vale la formula di Green

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx.$$

Quest'ultima formula ammette un'estensione agli aperti Ω poligonali (vedi Grisvard [4], 1.5.3).

Disuguaglianze di Poincaré

Trattiamo in questa sezione alcune disuguaglianze particolarmente utili nel Calcolo delle Variazioni.

Osserviamo anzitutto che il teorema 8.14 vale anche in dimensione maggiore di 1, ma naturalmente si dovrà supporre che il dominio sia un insieme connesso. Più precisamente vale il seguente teorema (vedi Ziemer [8], Corollary 2.1.9).

Teorema 8.22 *Sia Ω un aperto connesso di \mathbb{R}^n e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ($p > 1$). Se $\nabla u = 0$ quasi ovunque in Ω , allora u è costante.*

Teorema 8.23 (disuguaglianza di Poincaré) *Sia Ω un insieme aperto e limitato di \mathbb{R}^n e $p > 1$. Esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\int_{\Omega} |u|^p \, dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE Caso $n = 1$. La dimostrazione è particolarmente semplice nel caso in cui $\Omega = (a, b)$ è un intervallo limitato. In tal caso infatti vale la formula fondamentale del calcolo integrale e si ha quindi (poiché $u(a) = 0$)

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t) \, dt \right| \leq \|u'\|_1,$$

cioè $\|u\|_{\infty} \leq \|u'\|_1$ e la tesi segue dalla disuguaglianza di Hölder.

Caso generale. Nel caso di dimensione n qualunque si può procedere per assurdo. Supponiamo che la disuguaglianza non valga. Allora in particolare per ogni $C = j \in \mathbb{N}$ esiste $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$(8.2) \quad \|u_j\|_p > j \|\nabla u_j\|_p.$$

Non è restrittivo supporre che $\|u_j\|_p = 1$ per ogni j . Se infatti così non fosse basterebbe osservare che la (8.2) continua a valere per le funzioni $v_j = u_j / \|u_j\|_p$.

Ne consegue che, per la (8.2), la successione (u_j) è limitata in $W^{1,p}$ e quindi, poiché $p > 1$, esiste una sottosuccessione, che continuiamo a denotare con (u_j) tale che $u_j \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}$, ovvero $u_j \rightarrow u$ in L^p e $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ in L^p . Dalla (8.2), d'altra parte, si ottiene che

$$\|\nabla u_j\|_p < \frac{\|u_j\|_p}{j} = \frac{1}{j} \rightarrow 0$$

e di qui che $\nabla u = 0$. Per il teorema 8.22 si ha che u è costante su ogni componente connessa di Ω , ma poiché u deve tendere a zero sul bordo di ciascuna di esse ne consegue che $u = 0$, ma ciò è in contraddizione col fatto che $\|u\|_p = \lim_j \|u_j\|_p = 1$. \square

Osservazione 8.24 Come conseguenza della disuguaglianza di Poincaré, una norma equivalente in $W_0^{1,p}(\Omega)$ è data da $\left(\int_{\Omega} |Du|^p dx\right)^{1/p}$.

Analizzando la dimostrazione della disuguaglianza di Poincaré si vede che l'ipotesi che u abbia traccia nulla sul bordo si può indebolire richiedendo ad esempio che u abbia traccia nulla solamente su una parte della frontiera, purché essa sia "non trascurabile" e cioè abbia misura di Hausdorff $(n-1)$ -dimensionale diversa da zero e l'aperto Ω sia regolare e connesso. È altresì chiaro che se la si lascia cadere completamente il teorema non può valere (basta considerare il caso di una funzione costante non nulla). In tal caso vale però la seguente versione opportunamente modificata.

Teorema 8.25 Sia Ω un insieme aperto connesso di \mathbb{R}^n con frontiera localmente lipschitziana. Allora esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\int_{\Omega} |u - u_{\Omega}|^p dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dove $u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$.

Applicazioni a problemi di minimo

Esempio 8.26 Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Consideriamo il classico problema di minimo per l'integrale di Dirichlet

$$(8.3) \quad \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} g(x)u dx : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

dove $g \in L^2(\Omega)$ è una funzione assegnata. Il funzionale da minimizzare rappresenta, per esempio, l'energia totale di un conduttore termico (o elettrico) omogeneo e isotropo che occupa la regione Ω dello spazio e sotto l'influenza di sorgenti di calore (o campi elettrici) distribuite.

Introduciamo il funzionale $F : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$F(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} g(x)u dx.$$

Per provare l'esistenza del minimo con il metodo diretto cerchiamo una topologia su $W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

1. F sia sequenzialmente semicontinuo inferiormente,
2. F sia sequenzialmente coercivo.

Se scegliamo la topologia della norma incontriamo gli stessi problemi della dimensione 1: il funzionale è continuo ma non è coercivo.

Per la caratterizzazione della convergenza debole in $W_0^{1,2}$ F risulta sequenzialmente debolmente s.c.i. Per provare la coercività si può ricorrere alla disuguaglianza di Poincaré, per cui esiste una costante positiva C tale che, per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx;$$

utilizzando le disuguaglianze di Hölder e di Young si ha infatti, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \|g\|_2 \|u\|_2 \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} g^2 dx \\ &\geq \left(1 - \frac{C\varepsilon}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} g^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{C}{2} \int_{\Omega} g^2 dx \end{aligned}$$

avendo scelto nell'ultimo passaggio $\varepsilon = 1/C$. Poichè, per l'osservazione 8.24, il funzionale

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{c}{2} \int_{\Omega} g^2 dx$$

è sequenzialmente debolmente coercivo, allora tale risulta anche F e il teorema di Tonelli garantisce l'esistenza di almeno una soluzione del problema (8.3). La stretta convessità del funzionale ne garantisce infine l'unicità.

Esempio 8.27 Come prima, sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Nelle applicazioni fisico matematiche è più interessante il funzionale

$$F(u) = \int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u, \nabla u \rangle dx - \int_{\Omega} g(x) u dx$$

con cui è possibile rappresentare l'energia totale di un conduttore termico (o elettrico) che occupa la regione Ω dello spazio e sotto l'influenza di sorgenti di calore (o campi elettrici) distribuite, oppure quella di un corpo elastico lineare soggetto all'azione di forze esterne. Nel caso dei conduttori, la matrice $A(x)$ rappresenta la conduttività, che può variare da punto a punto (conduttore non omogeneo e non isotropo).

Prescindendo dalla fisica del problema supponiamo che la matrice $A(x)$ sia a coefficienti misurabili, limitata e definita positiva³ ed indichiamo con $\lambda(x)$ il minimo autovalore (positivo). In conseguenza di tali ipotesi, per ogni vettore ξ si ha

$$\Lambda |\xi|^2 \geq \langle A(x) \xi, \xi \rangle \geq \lambda(x) |\xi|^2$$

per un'opportuna costante Λ . Per la seconda disuguaglianza si ha che

$$F(u) \geq \int_{\Omega} \lambda(x) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} g(x) u dx.$$

Se inoltre $A(x)$ soddisfa la seguente condizione di *ellitticità uniforme*, cioè esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\lambda(x) \geq c > 0 \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega$$

(equivalente a dire che $1/\lambda(x) \in L^\infty(\Omega)$) allora

$$F(u) \geq c \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} g(x) u dx$$

e quindi F è sequenzialmente debolmente coercivo in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (perchè maggiore un funzionale coercivo). Inoltre, come prima, F è anche sequenzialmente debolmente semi-continuo inferiormente in $W_0^{1,2}(\Omega)$ e pertanto il corrispondente problema di minimo ha soluzione in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

³Come si vedrà, quest'ultima ipotesi non è soddisfatta nel caso dell'elasticità, mentre può esserlo nei problemi di conduzione.

È interessante notare che se si chiede solo che $1/\lambda(x) \in L^1(\Omega)$ allora il funzionale non risulta debolmente coercivo in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (ad esempio $\lambda(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$ e $\Omega = (0,1)$). La coercività può essere in questo caso recuperata con un procedura cosiddetta di *rilassamento* che consiste in un'estensione a $+\infty$ del funzionale su uno spazio più grande di $W_0^{1,2}(\Omega)$ (ad esempio quello delle *funzioni a variazione limitata*) con un'opportuna topologia che garantisca la coercività. In questo modo si può però perdere la semicontinuità. Per la coercività, d'altra parte, le successioni minimizzanti sono relativamente compatte e la caratterizzazione dei punti limite delle sottosuccessioni convergenti può essere fatta allora considerando il più grande funzionale semicontinuo inferiormente minorante F , che risulterà ancora coercivo e i cui punti di minimo saranno punti di accumulazione delle successioni minimizzanti.

Bibliografia

- [1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
- [3] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.
- [4] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Springer, Berlin, 1992.
- [5] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer.
- [6] N. Meyers and J. Serrin, $H=W$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **51** (1964).
- [7] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.
- [8] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.