Capitolo 7

Distribuzioni

I principali riferimenti per questa lezione sono Vladimirov [2] e Barros-Neto [1].

Lo spazio delle funzioni test

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo l'insieme $C_c^\infty(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, questo insieme è non vuoto perchè contiene la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| \le 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

Modificando questa funzione in maniera opportuna si può vedere che $C_c^\infty(\Omega)$ è non vuoto purchè l'aperto Ω sia non vuoto.

$C_c^\infty(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni definite su Ω. Inoltre è chiuso rispetto al prodotto con una funzione $C^\infty(\Omega)$.

Notazione: sia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un multi indice. Allora, dato un insieme aperto Ω e una funzione φ in $\mathscr{D}(\Omega)$, poniamo

$$D_\alpha \varphi := \partial^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Indichiamo con $\mathscr{D}(\Omega)$ lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ con la struttura di convergenza introdotta dalla definizione seguente.

Definizione 7.1 *Una successione* (φ_j), $\varphi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ converge a zero in $\mathscr{D}(\Omega)$ *se sono soddisfatte le due condizioni seguenti:*

1. *esiste un compatto* $K \subset \Omega$ *tale che* $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$*;*
2. *per ogni multiindice* α *la successione* $(D_\alpha \varphi_j)$ *converge uniformemente a zero.*

Data $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *diremo poi che* $\varphi_j \to \varphi$ *in* $\mathscr{D}(\Omega)$ *se* $\varphi_j - \varphi \to 0$ *in* $\mathscr{D}(\Omega)$.

Osserviamo che la richiesta *1* non è banale perchè l'unione numerabile di chiusi può non essere chiusa.

In $\mathscr{D}(\Omega)$ si può definire una topologia (di limite induttivo degli spazi $C_K^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \ : \ \operatorname{supp} u \subseteq K\}$, con K compatto in Ω) le cui successioni convergenti sono esattamente quelle della definizione precedente. Gli elementi di $\mathscr{D}(\Omega)$ si dicono *funzioni test.*

Esempio 7.2 Sia φ come in (7.1) e sia $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\varphi(x)$. Allora $\varphi_\nu(x) \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$.

Esempio 7.3 Sia φ come in (7.1) e sia $\varphi_\nu = \frac{1}{\nu}\varphi(\frac{x}{\nu})$. Questa successione non converge in $\mathscr{D}(\Omega)$ perchè non soddisfa la *1.*

Non metrizzabilità di $\mathscr{D}(\Omega)$

La convergenza definita in $\mathscr{D}(\Omega)$ non è descrivibile da una metrica. Lo proveremo mostrando che in $\mathscr{D}(\Omega)$ non funziona un procedimento diagonale tipico degli spazi metrici, descritto nel seguente lemma.

Lemma 7.4 (Procedimento diagonale standard) *Sia (X, d) uno spazio metrico, e sia*

$$\begin{array}{ll} x_1^1, \dots, x_\nu^1, \dots & \textit{una successione convergente a } x^1 \\ x_1^2, \dots, x_\nu^2, \dots & \textit{una successione convergente a } x^2 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_1^k, \dots, x_\nu^k, \dots & \textit{una successione convergente a } x^k \end{array}$$

e supponiamo che (x^k) converga ad x. Allora

1. *esiste una successione strettamente crescente di interi (ν_k) tale che la successione $(x^k_{\nu_k})$ converge a x;*

2. *esiste una successione non decrescente di interi $k_\nu \to \infty$ tale che la successione $(x_\nu^{k_\nu})$ converge a x.*

Dimostrazione *1.* Per definizione di limite

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists \nu_k \text{ strettamente crescente } : \ d(x_\nu^k, x^k) < \frac{1}{2^k}\ \forall\, \nu \geq \nu_k.$$

Allora

$$d(x^k_{\nu_k}, x) \leq d(x^k_{\nu_k}, x^k) + d(x^k, x) < \frac{1}{2^k} + d(x^k, x) \to 0 \quad \text{per } k \to \infty$$

cioè la tesi *1.*

Proviamo la *2.* Passo 1. Per l'ipotesi $\lim_k x^k = x$,

$$\exists\, k_1 \ : \ d(x^{k_1}, x) < \frac{1}{2^1}$$

e per l'ipotesi $\lim_\nu x_\nu^{k_1} = x^{k_1}$,

$$\exists\, \nu_1 \ : \ d(x_\nu^{k_1}, x^{k_1}) < \frac{1}{2^1} \qquad \forall\, \nu \geq \nu_1.$$

Allora si ha

$$d(x_\nu^{k_1}, x) < 1 \qquad \forall\, \nu \geq \nu_1.$$

Passo 2. Per l'ipotesi $\lim_k x^k = x$,

$$\exists\, k_2 > k_1 \ : \ d(x^{k_2}, x) < \frac{1}{2^2}$$

e per l'ipotesi $\lim_\nu x_\nu^{k_2} = x^{k_2}$,

$$\exists\, \nu_2 > \nu_1 \ : \ d(x_\nu^{k_2}, x^{k_2}) < \frac{1}{2^2} \qquad \forall\, \nu \geq \nu_2.$$

Allora si ha

$$d(x_\nu^{k_2}, x) < \frac{1}{2} \qquad \forall\, \nu \geq \nu_2.$$

Per $\nu_1 \leq \nu < \nu_2$ si pone $k_\nu = k_1$, cosicchè per tali ν si ha $d(x_\nu^{k_\nu}, x) < 1$. Per i ν precedenti si può scegliere ancora $k_\nu = k_1$ ma non c'è alcuna stima della distanza da x.

Passo 3. Per l'ipotesi $\lim_k x^k = x$,

$$\exists\, k_3 > k_2 \ : \ d(x^{k_3}, x) < \frac{1}{2^3}$$

e per l'ipotesi $\lim_\nu x_\nu^{k_3} = x^{k_3}$,

$$\exists\, \nu_3 > \nu_2 \ : \ d(x_\nu^{k_3}, x^{k_3}) < \frac{1}{2^3} \qquad \forall\, \nu \geq \nu_3.$$

Allora si ha

$$d(x_\nu^{k_3}, x) < \frac{1}{2^2} \qquad \forall\, \nu \geq \nu_3.$$

Per $\nu_2 \leq \nu < \nu_3$ si pone $k_\nu = k_2$, cosicchè per tali ν si ha $d(x_\nu^{k_\nu}, x) < 1/2$.

Passo n e $n+1$. Supponiamo di aver determinato $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n$ e $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_n$ con le proprietà

$$d(x^{k_i}, x) < \frac{1}{2^i}, \qquad d(x_\nu^{k_i}, x) < \frac{1}{2^{i-1}} \qquad \forall\, \nu \geq \nu_i.$$

e di aver posto $k_\nu = k_{i-1}$ per $\nu_{i-1} \leq \nu < \nu_i$, cosicchè per tali ν si ha $d(x_\nu^{k_\nu}, x) < 1/2^{i-1}$. Procedendo come sopra si costruiscono k_{n+1} e ν_{n+1}.

Induzione. Risultano in tal modo definite per induzione successioni (k_n) e (ν_n) con cui si costrisce una k_ν con la proprietà richiesta. □

Esercizio 7.5 Dimostrare la seguente proposizione.

Sia $(a_\nu^k)_{k,\nu \in \mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali. Se è soddisfatta una almeno tra le seguenti condizioni*

(i) $\lim_k \lim_\nu a_\nu^k = \ell$,

(ii) $\sup_k \lim_\nu a_\nu^k = \ell$,

(i) $\lim_k \limsup_\nu a_\nu^k = \ell = \lim_k \liminf_\nu a_\nu^k$,

allora esistono successioni non decrescenti di interi ν_k *e* k_ν *tali che*

$$\lim_k a_{k,\nu_k} = \lim_\nu a_{k_\nu,k} = \ell.$$

Esempio 7.6 Sia φ come in (7.1). La famiglia di funzioni

$$\varphi_\nu^k(x) = \frac{1}{\nu}\varphi(\frac{x}{k})$$

non gode della proprietà descritta dal precedente lemma (nessuna diagonale $\varphi_{\nu_k}^k$ può soddisfare la proprietà *1.* della convergenza in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$). Ciò prova che $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ non è metrizzabile.

Lo spazio delle distribuzioni

Definizione 7.7 *Indichiamo con $\mathscr{D}'(\Omega)$ lo spazio duale di $\mathscr{D}(\Omega)$, cioè lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari e continue da $\mathscr{D}(\Omega)$ in $\mathbb{R}$. Gli elementi di $\mathscr{D}'(\Omega)$ sono detti* distribuzioni.

Esempio 7.8 (Distribuzione di Dirac) Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$. Definiamo $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. δ è una distribuzione. Infatti:

- per ogni $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha
$$\delta(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda\varphi_1(0) + \mu\varphi_2(0) = \lambda\delta(\varphi_1) + \mu\delta(\varphi_2),$$
- se φ_j è una successione di funzioni in $\mathscr{D}(\Omega)$ che tende alla funzione φ in $\mathscr{D}(\Omega)$ allora
$$\delta(\varphi_j) = \varphi_j(0) \to \varphi(0) = \delta(\varphi)$$
per la definizione di convergenza in $\mathscr{D}(\Omega)$.

Esercizio 7.9 *Sia $n = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}$. $T(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}(j)$ è una distribuzione.*

Funzioni localmente sommabili

Esempio 7.10 Ogni funzione $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ definisce una distribuzione
$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$
In questo senso le funzioni di L^1_{loc} sono distribuzioni. Mostriamo che T_f è una distribuzione. Infatti T_f è ben definita perché $f\varphi \in L^1(\Omega)$, T_f è lineare per linearità dell'integrale. Per vedere che è continua (in zero) supponiamo che $\varphi_j \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$. Allora esiste un insieme compatto K contenuto in Ω tale che $\operatorname{supp}\varphi_j$ è contenuto in K per $n = 1, 2, 3, \dots$. Allora
$$|T_f(\varphi_j)| = |\int_K f(x)\varphi_j(x)dx| \le \|\varphi_j\|_{\infty,K} \int_K |f(x)| \tag{7.2}$$
e l'ultimo membro della (7.2) tende a 0 perché $\varphi_j \to \varphi$ uniformemente su K.

Proposizione 7.11 *L'immersione di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ in $\mathscr{D}'$ definita dall'applicazione*
$$\begin{array}{rccc} T: & L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \to & \mathscr{D}'(\Omega) \\ & f & \mapsto & T_f \end{array}$$
ove T_f è definita come nell'esempio 7.10, è lineare e iniettiva.

Dimostrazione Diamo per semplicità la dimostrazione nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. Il caso generale si ottiene con semplici opportune modifiche. La linearità è conseguenza della linearità dell'integrale. Per dimostrare che è iniettiva basta, per la linearità, dimostrare che $T_f = 0$ in $\mathscr{D}$ implica $f = 0$ in L^1_{loc} cioè che
$$\int f(x)\varphi(x)dx = 0 \ \forall\varphi \in \mathscr{D} \ \Rightarrow \ f = 0 \text{ quasi ovunque.}$$

Dimostriamo dapprima che

$$\int f(x)\varphi(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

implica che

$$\int f(x)\chi(x)dx = 0 \ \text{ per ogni } \chi \text{ misurabile, limitata, a supporto compatto.}$$

Sia j un mollificatore. Definiamo $j_h = h^n j(xh)$. Poichè χ essendo misurabile, limitata e nulla fuori da un compatto appartiene a L^1, si ha

$$\chi_h = \chi * j_h \in C^\infty$$

e inoltre

$$\operatorname{supp} \chi_h \subseteq \operatorname{supp} \chi + \overline{B(0, 1/h)} \subseteq \operatorname{supp} \chi + \overline{B(0, 1)} =: K$$

cioè i supporti delle χ_h sono tutti contenuti nel medesimo compatto K. In particolare, per l'ipotesi, si ha

$$\int f(x)\chi_h(x)dx = 0 \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Inoltre, sempre per un noto teorema sulle convoluzioni con mollificatori si ha, per $h \to \infty$,

$$\chi_h \to \chi \ \text{ in } L^1.$$

Dalla (χ_h) si può dunque estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque, diciamo χ_{h_k}. Inoltre, poiché $\int j_h = 1$, si ha che

$$|\chi_h(x)| = |\int \chi(x - y) j_h(y) dy| \leq \sup |\chi| = M \ \forall h \in \mathbb{N}$$

e per il teorema della convergenza dominata si ha allora

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int f(x)\chi_{h_k}(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_K f(x)\chi_{h_k}(x)dx = \int f(x)\chi(x)dx$$

come volevasi dimostrare. Rimane infine da provare che

$$\int f(x)\chi(x)dx = 0 \ \text{ per ogni } \chi \text{ misurabile, limitata, a supporto compatto}$$

implica $f = 0$ quasi ovunque.

A tal scopo osserviamo che, poiché f è misurabile, allora l'insieme $\Omega^+ = \operatorname{supp} f^+$, dove f^+ è la parte positiva di f, è misurabile. Quindi, fissato $a > 0$ e detta $\chi_a(x)$ la funzione caratteristica di $\Omega^+ \cap B(0, a)$ dove $B(0, a)$ è la palla di centro 0 e raggio a, si ha

$$0 = \int f(x)\chi_a(x)dx = \int_{B(0,a)} f^+(x)dx.$$

Questo implica che $f^+ = 0$ quasi ovunque in $B(0, a)$ e, per l'arbitrarietà di a, che $f^+ = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$. Analogamente si prova che anche la parte negativa f^-, e dunque anche f, è nulla quasi ovunque. □

La proposizione ora dimostrata consente di identificare L^1_{loc} con la sua immagine in $\mathscr{D}'$ mediante T e quindi di affermare che le funzioni localmente sommabili sono distribuzioni.

Osservazione 7.12 $\delta_{x_0} \notin L^1_{\text{loc}}$.

Si tratta di provare che non esiste $f \in L^1_{\text{loc}}$ tale che

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \int f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, cioè che $\delta_{x_0} = T_f$. Allora, presa φ come in (7.1) e $\varphi_a = \varphi(\frac{x-x_0}{a})$ si avrebbe

$$\delta_{x_0}(\varphi_a) = \int f\varphi_a$$

cioè

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = \int_{|x-x_0|\leq a} f(x)\varphi_a(x)dx$$

ma, per $a \to 0$

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = \left| \int_{|x-x_0|\leq a} f(x)\varphi_a(x)dx \right| \leq \int_{|x-x_0|\leq a} |f(x)|dx \to 0$$

che è un'evidente contraddizione.

Altri esempi di distribuzioni

Esempio 7.13 Le misure di Radon su Ω (finite sui compatti) sono distribuzioni, nel senso che l'applicazione

$$T_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi\, d\mu \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

è una distribuzione. Infatti T_μ è lineare e, se $\varphi_j \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$ e K è un compatto che ne contiene tutti i supporti allora

$$|T_\mu(\varphi_j)| = \left| \int_K \varphi_j d\mu \right| \leq \mu(K) \sup|\varphi_j| \to 0 \text{ per } j \to \infty.$$

Esempio 7.14 La funzione

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

appartiene a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e definisce pertanto una distribuzione

$$H(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

detta *distribuzione di Heaviside.*

Esempio 7.15 Sia $f \in L^1_{\text{loc}}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^m$. L'applicazione

$$T_\alpha(\varphi) = \int f(x) D_\alpha \varphi(x)dx$$

è una distribuzione.

Caratterizzazione delle distribuzioni

Teorema 7.16 *Sia $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare. $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se e solo se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono $C_K > 0$ e $m_K \in \mathbb{N}_0$ tali che*

$$|T(\varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup |D_\alpha \varphi| \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$$

ove $\mathscr{D}_K$ denota l'insieme delle funzioni test con supporto in K.

Dimostrazione ($\Leftarrow$) è facile. Proviamo ($\Rightarrow$). Per assurdo, supponiamo che esista $K \subset \Omega$ compatto, tale che per ogni scelta di $C > 0$ ed $m \in \mathbb{N}_0$ esista una funzione $\varphi_{C,m} \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ tale che

$$|T(\varphi)| > C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D_\alpha \varphi|.$$

Prendendo in particolare $C = m = j$ si ha che per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste $\varphi_j \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ tale che

$$|T(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |D_\alpha \varphi_j|.$$

Osservato che il primo membro è strettamente positivo (anche il secondo per la verità) dividiamo ambo i membri per $j|T(\varphi_j)|$ ottenendo

$$\frac{1}{j} > \sum_{|\alpha| \leq j} \sup \frac{|D_\alpha \varphi_j|}{|T(\varphi_j)|}.$$

Posto $\psi_j = \dfrac{\varphi_j}{T(\varphi_j)}$ si ha $\psi_j \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ e

$$\frac{1}{j} > \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |D_\alpha \psi_j|.$$

Da quest'ultima, passando al limite per $j \to +\infty$, segue in particolare che $\psi_j \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$. Per la continuità di T allora $T(\psi_j) \to 0$ in $\mathbb{R}$, contro il fatto che $T(\psi_j) = 1$. $\square$

Se l'm del teorema non dipende dal compatto K allora la distribuzione si dice *di ordine finito.* In tal caso il più piccolo m per cui vale la disuguaglianza si dice *ordine della distribuzione.*

Esempio 7.17 Le funzioni di L^1_{loc} e le misure di Radon sono distribuzioni di ordine 0. In effetti, per il teorema di rappresentazione di Riesz per le misure, la classe delle misure di Radon può essere identificata con il sottospazio (vettoriale) di $\mathscr{D}'(\Omega)$ costituito dalle distribuzioni di ordine 0.

La distribuzione dell'Esempio (7.15) è di ordine $|\alpha|$.

La distribuzione dell'Esercizio (7.9) non è di ordine finito.

La topologia di $\mathscr{D}'(\Omega)$

Si è già osservato che $\mathscr{D}'(\Omega)$ è uno spazio vettoriale. Come abbiamo fatto per lo spazio delle funzioni test individuiamo in $\mathscr{D}'(\Omega)$ una topologia descrivendo le successioni convergenti.

Definizione 7.18 *Sia (T_j) una successione di distribuzioni. Diremo che $T_j \to 0$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ se $T_j(\varphi) \to 0$ in $\mathbb{R}$ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.*

Si avrà poi che $T_j \to T$ se e solo se $T_j - T \to 0$. Si tratta dunque di convergenza puntuale. Essa caratterizza una topologia (non metrizzabile) usualmente chiamata *topologia debole* per l'analogia con la topologia debole* dei duali degli spazi di Banach.

In $\mathscr{D}'(\Omega)$ vale un principio di limitatezza uniforme analogo al teorema di Banach-Steinhaus per gli spazi normati. Una conseguenza è che le successioni convergenti in ogni punto sono convergenti debolmente; vale cioè il seguente teorema.

Teorema 7.19 *Sia (T_j) una successione di distribuzioni tale che per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esista finito il limite*

$$\lim_{j\to\infty} T_j(\varphi).$$

Allora esiste $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tale che $T_j \to T$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Dunque ogni successione puntualmente di Cauchy è debolmente convergente.

Esempio 7.20 La successione di funzioni

$$f_j(x) = \begin{cases} j & \text{se } x \in (-\frac{1}{2j}, \frac{1}{2j}) \\ 0 & \text{altrove in } (-1,1) \end{cases}$$

converge a δ_0 in $\mathscr{D}'(-1,1)$. Essa costituisce quindi un esempio di successione limitata in L^1 ($\|f_j\|_1 = 1$ per ogni j) da cui non è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente in L^1, infatti qualunque successione di questo tipo sarebbe costretta a convergere alla δ_0 che non appartiene a L^1.

Esempio 7.21 Sia $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int u = 1$ e, per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$u_h(x) = h^n u(hx).$$

Si ha $u_h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, quindi in particolare $u_h \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e

$$u_h \to \delta_0 \quad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Esercizio 7.22 *Sia $(x_j) \subset \mathbb{R}^n$. Mostrare che si ha*

1. $x_j \to x_0 \Rightarrow \delta_{x_j} \to \delta_{x_0}$.
2. $|x_j| \to +\infty \Rightarrow \delta_{x_j} \to 0$.

Derivata di una distribuzione

Osservazione 7.23 Se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ allora la sua derivata parziale j-esima è continua e quindi L^1_{loc} e pertanto definisce una distribuzione

$$T_{D_j f}(\varphi) = \int D_j f(x)\varphi(x)dx.$$

Se indichiamo con $x = (x', x_j)$ allora, eventualmente scambiando l'ordine di integrazione (usando i teoremi di Tonelli e di Fubini) e poi integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} T_{D_j f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} D_j f(x', x_j)\varphi(x', x_j)\, dx_j dx' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x', x_j) D_j\varphi(x', x_j)\, dx_j dx' = -T_f(D_j\varphi). \end{aligned}$$

Definiamo allora, in modo naturale, per $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, la derivata della distribuzione associata ad f come la distribuzione associata alla derivata di f, cioè

$$D_j T_f(\varphi) := -T_f(D_j\varphi).$$

Abbiamo già osservato che quella ora definita è una distribuzione (cfr. Esempio 7.15). Inoltre, non facendo uso della derivata di f, questa definizione si estende immediatamente a tutte le distribuzioni di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Essa si estende a tutte le altre distribuzioni al modo seguente.

Definizione 7.24 *Sia* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

$$\boxed{D_j T(\varphi) := -T(D_j\varphi)}.$$

Poiché ora T non proviene necessariamente da una $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, è necessario verificare (esercizio) che la definizione è ben posta, cioè che D_jT è effettivamente una distribuzione.

Conseguenze della definizione ora data sono le seguenti

- ogni distribuzione è derivabile;
- si possono definire le derivate di ordine superiore e l'ordine di derivazione è sempre commutabile;
- se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ si ha
$$D_\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D_\alpha\varphi)$$
e l'operatore di derivazione
$$\begin{array}{rccc} D_\alpha : & \mathscr{D}'(\Omega) & \to & \mathscr{D}'(\Omega) \\ & T & \mapsto & D_\alpha T \end{array}$$
è lineare e continuo;
- se $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ allora la sue derivate classiche fino all'ordine $|\alpha|$, che sono continue e quindi $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si identificano con quelle distribuzionali.

Esempio 7.25 Derivata della distribuzione di Heaviside: $H' = \delta_0$.

Esempio 7.26 Derivate della delta: $D_\alpha\delta(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}D_\alpha\varphi(0)$.

Esempio 7.27 Sia $f \in C^m(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ tale che esistano finiti

$$f^{(h)}(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f^{(h)}(x) \quad \text{e} \quad f^{(h)}(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f^{(h)}(x)$$

per ogni $h \in \{0, ..., m\}$, e indichiamo con

$$\sigma_h = f^{(h)}(x_0^+) - f^{(h)}(x_0^-)$$

i salti in x_0 di f e delle sue derivate. Si ha $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ e

$$T_f' = \sigma_0\delta_{x_0} + T_{f'},$$

e, in generale,

$$T_f^{(h)} = \sigma_0\delta_{x_0}^{(h-1)} + \sigma_1\delta_{x_0}^{(h-2)} + \cdots + \sigma_{h-1}\delta_{x_0} + T_{f^{(h)}}.$$

Formula di Leibniz sulla derivazione del prodotto

Lemma 7.28 *Siano f, g funzioni di classe C^m e siano $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq m$. Allora vale la formula*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2!} D^{\alpha_1} f \cdot D^{\alpha_2} g.$$

DIMOSTRAZIONE Procediamo per induzione su $|\alpha|$.

Se $|\alpha| = 1$ allora esiste $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $\alpha = \mathrm{e}_j$, pertanto la somma è composta dai due soli addendi corrispondenti alle due sole possibili scelte $\alpha_1 = \mathrm{e}_j$, $\alpha_2 = 0$ e viceversa. Ne consegue che la formula in questo caso si riduce alla usuale formula di derivazione del prodotto.

Per procedere con l'induzione introduciamo il seguente ordinamento in $\mathbb{N}^n$. Siano $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^n$; diremo che $\alpha' < \alpha$ se e solo se $\alpha'_i \leq \alpha_i$ per $i = 1, \ldots, n$ e esiste $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $\alpha'_j < \alpha_j$.

Per ipotesi di induzione supponiamo la formula vera per ogni $\alpha' < \alpha$, $|\alpha| > 1$ e la dimostriamo per $\alpha = \alpha' + \mathrm{e}_j$. Per ipotesi di induzione si ha

$$\begin{aligned} D^\alpha(fg) &= D^{\alpha'}(D_j(fg)) = D^{\alpha'}(D_j f \cdot g + f \cdot D_j g) \\ &= \sum_{\alpha'_1+\alpha'_2=\alpha'} \frac{\alpha'!}{\alpha'_1!\alpha'_2!} D^{\alpha'_1} D_j f \cdot D^{\alpha'_2} g + \sum_{\alpha'_1+\alpha'_2=\alpha'} \frac{\alpha'!}{\alpha'_1!\alpha'_2!} D^{\alpha'_1} f \cdot D^{\alpha'_2} D_j g. \end{aligned}$$

Ponendo $\alpha'_1 + \mathrm{e}_j = \alpha_1$, $\alpha'_2 = \alpha_2$ nella prima somma e $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha'_2 + \mathrm{e}_j = \alpha_2$ nella seconda e scrivendo tutto in termini di α_1, α_2 e α, si ottiene che

$$\begin{aligned} D^\alpha(fg) &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!}{(\alpha_1 - \mathrm{e}_j)!\alpha_2!} D^{\alpha_1} f \cdot D^{\alpha_2} g + \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!}{\alpha_1!(\alpha_2 - \mathrm{e}_j)!} D^{\alpha_1} f \cdot D^{\alpha_2} g \\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} \Big(\frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!}{(\alpha_1 - \mathrm{e}_j)!\alpha_2!} + \frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!}{\alpha_1!(\alpha_2 - \mathrm{e}_j)!} \Big) D^{\alpha_1} f \cdot D^{\alpha_2} g. \end{aligned}$$

Osservato ora che

$$(\alpha_1 - \mathrm{e}_j)! = \frac{\alpha_1!}{\alpha_{1j}}, \qquad (\alpha_2 - \mathrm{e}_j)! = \frac{\alpha_1!}{\alpha_{2j}}$$

si ha che

$$\frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!}{(\alpha_1 - \mathrm{e}_j)!\alpha_2!} + \frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!}{\alpha_1!(\alpha_2 - \mathrm{e}_j)!} = \frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!(\alpha_{1j} + \alpha_{2j})}{\alpha_1!\alpha_2!} = \frac{(\alpha - \mathrm{e}_j)!\alpha_j}{\alpha_1!\alpha_2!} = \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2!}$$

e quindi la tesi. □

Prodotto di una funzione con una distribuzione

Vi sono diverse difficoltà nel definire un prodotto tra distribuzioni che generalizzi quello tra funzioni, tra cui il fatto che L^1_{loc} non è chiuso rispetto al prodotto (esempio: $f(x) = 1/\sqrt{x}$). Risulta però chiuso rispetto al prodotto con una funzione C^∞.

Definizione 7.29 *Siano $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $a \in C^\infty(\Omega)$. Definiamo prodotto della distribuzione T con la funzione a la distribuzione*

$$(aT)(\varphi) := T(a\varphi).$$

La definizione ora data generalizza il prodotto di funzioni, cioè si ha

$$aT_f = T_{af}.$$

È però necessario provare che la definizione è ben posta, e cioè che aT è effettivamente una distribuzione. Lo dimostriamo utilizzando il teorema di caratterizzazione. La linearità è immediata. Poichè T è una distribuzione, per il teorema di caratterizzazione, per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono $C_K > 0$ e $m_K \in \mathbb{N}$ tali che

$$|(aT)(\varphi)| = |T(a\varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_K |\partial^\alpha (a\varphi)| \quad \forall a\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Per la formula di Liebnitz sulla derivazione del prodotto si ha

$$\partial^\alpha (a\varphi) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2!} \partial^{\alpha_1} a \, \partial^{\alpha_2} \varphi$$

e perciò, posto $C(K, \alpha_1) = \max_{x \in K} |\partial^{\alpha_1} a(x)|$,

$$|\partial^\alpha (a\varphi)| \leq \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2!} C(K, \alpha_1) |\partial^{\alpha_2} \varphi| \leq C(K, \alpha) \sum_{\beta \leq \alpha} |\partial^\beta \varphi|$$

e infine

$$\begin{aligned} |(aT)(\varphi)| &\leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_K |\partial^\alpha (a\varphi)| \\ &\leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m_K} C(K, \alpha) \sum_{\beta \leq \alpha} \sup_K |\partial^\beta \varphi| \leq \tilde{C}_K \sum_{|\beta| \leq m_K} \sup_K |\partial^\beta \varphi| \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Osservazione 7.30 Se T è di ordine finito allora anche aT è di ordine finito.

Proposizione 7.31 *Sia $a \in C^\infty(\Omega)$. L'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}'(\Omega) & \to & \mathscr{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & aT \end{array}$$

è lineare e continua.

DIMOSTRAZIONE Esercizio.

Esempio 7.32 (Prodotto di una funzione C^∞ con una delta.) Si ha

$$a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}.$$

Esercizio 7.33 *Siano $a \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Provare che vale la formula di Leibniz*

$$\partial_j (aT) = \partial_j a \cdot T + a \cdot \partial_j T.$$

Bibliografia

[1] J. Barros-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Dekker, New York, 1973.

[2] S.V. Vladimirov, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.