Capitolo 6

Convoluzione e regolarizzazione

Riferimenti bibliografici: Rudin [2], 7.8 e Brezis [1], IV.4
Notazioni: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Funzioni localmente sommabili

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue. Si definisce

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ \forall\, x_0 \in \Omega \ \exists\, V_{x_0} \ : \ u_{|V_{x_0}} \in L^1(V_{x_0})\}$$

o, equivalentemente (esercizio),

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{K} \ : \ u_{|K} \in L^1(K) \ \forall\, K \text{ compatto}, \ K \subseteq \Omega\}.$$

Esercizio 6.1 *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue (non necessariamente di misura finita). Allora si ha*[1]

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \forall\, p \in [1, +\infty]$$

Prodotto di convoluzione in L^1

Siano f e g due funzioni. L'integrale

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy,$$

qualora abbia senso, si dice prodotto di convoluzione di f e g.

Casi in cui l'integrale ha senso sono ad esempio $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ e $g \in C_{\mathrm{c}}$, oppure $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$. Eseguendo il cambiamento di variabile $x - y = t$ si vede che $f * g = g * f$. Un fatto importante è che L^1 è chiuso rispetto a questo prodotto, quindi L^1 è un'algebra di convoluzione; vale infatti il seguente teorema.

Teorema 6.2 *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si ha*

(i) la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è sommabile q.o. $x \in \mathbb{R}^n$. Per gli x in cui è sommabile si pone $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$.

[1] Ricordiamo che se Ω ha misura finita allora $1 \le p < q \le \infty \Rightarrow L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$.

(ii) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f * g = g * f$, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

La dimostrazione è un'applicazione esemplare dei teoremi di Fubini e di Tonelli che qui ricordiamo.

Teorema 6.3 (di Fubini o di disintegrazione e scambio dell'ordine di integrazione) *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *aperti di* $\mathbb{R}^n$. *Se* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *allora*

1. *per q.o.* $x \in \Omega_1$ $F(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ *e* $\displaystyle\int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \in L^1(\Omega_1)$;

2. *per q.o.* $y \in \Omega_2$ $F(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1)$ *e* $\displaystyle\int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \in L^1(\Omega_2)$.

Inoltre

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)\,dxdy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx.$$

Teorema 6.4 (di Tonelli o di assoluta integrabilità) *Se* $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *è misurabile nella* σ*-algebra prodotto, e se*

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|\,dy < \infty \tag{6.1}$$

allora $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Osservazione 6.5 Osserviamo che l'applicazione consecutiva dei teoremi di Tonelli e di Fubini consente di affermare che se una funzione misurabile ha un integrale iterato assolutamente convergente (cioè vale la (6.1)), allora è sommabile e si può scambiare l'ordine di integrazione.

Dimostrazione (del Teorema 6.2). Siccome f e g sono solo $L^1(\mathbb{R}^n)$, e la traslata di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ è $L^1(\mathbb{R}^n)$, ma il prodotto usuale di funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$ può non essere $L^1(\mathbb{R}^n)$, non possiamo concludere direttamente che $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è sommabile. Consideriamo invece la mappa $x \mapsto |f(x-y)g(y)|$ e, procedendo formalmente, eseguiamo il cambiamento di variabile $x - y = t$ ottenendo

$$\begin{aligned}\int \Big(\int |f(x-y)g(y)|\,dx\Big)\,dy &= \int |g(y)|\Big(\int |f(x-y)|\,dx\Big)\,dy = \int |g(y)|\Big(\int |f(t)|\,dt\Big)\,dy \\ &= \int |f(t)|\,dt \int |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Le uguaglianze risultano quindi giustificate a posteriori e sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Tonelli (verificare per esercizio la misurabilità), per cui $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ è una funzione $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Quindi, per Fubini, si ottiene la prima parte della tesi ed è inoltre lecito scambiare l'ordine di integrazione ottenendo

$$\int \Big|\int f(x-y)g(y)\,dy\Big|\,dx \leq \int \Big(\int |f(x-y)g(y)|\,dy\Big)\,dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$$

che traduce la seconda parte della tesi. $\square$

Regolarizzazione per convoluzione

Indichiamo con $B(0,1)$ la palla unitaria di centro zero in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 6.6 *Una funzione* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B(0,1)}$*,* $\varphi \geq 0$*,* $\int \varphi = 1$ *si chiama mollificatore o nucleo regolarizzante.*

Una funzione che soddisfa tutte le condizioni della definizione è, per esempio, la seguente

$$\varphi(x) = \begin{cases} K\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

dove la costante di normalizzazione K è

$$K = \left(\int_{|x|<1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}}\, dx \right)^{-1}$$

Se φ è un mollificatore, lo sono anche tutte le funzioni

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \qquad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Si ha inoltre $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \overline{B(0,\varepsilon)}$. I mollificatori sono utili per costruire approssimazioni regolari di funzioni L^p.

Teorema 6.7 *Sia* φ *un mollificatore e* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *una funzione con supporto in un aperto* A *di* $\mathbb{R}^n$ *e di classe* $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$*. Allora*

1. $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*;*

2. *se* $\operatorname{supp} u = K$ *è compatto, allora* $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon * u \subseteq K + \overline{B(0,\varepsilon)}$ *(in particolare quindi* $\varphi_\varepsilon * u \in C_c^\infty(A)$ *per ogni* $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, A^C)$*).*

Dimostrazione Anzitutto osserviamo che $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e che $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, quindi il prodotto di convoluzione è ben definito. Per definizione

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy = \int_{A\cap\overline{B(x,\varepsilon)}} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy$$

dal momento che $\operatorname{supp} u \subseteq A$ mentre $\operatorname{supp}\varphi(x-\cdot) \subseteq \overline{B(x,\varepsilon)}$. Per stabilire che $\varphi_\varepsilon * u(x)$ è derivabile parzialmente rispetto ad x, verifichiamo che sono soddisfatte le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Fissiamo a tal scopo un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo un intorno compatto V di x_0. Poichè V è compatto allora l'insieme $W = \cup_{x\in V}\overline{B(x,\varepsilon)}$ è limitato. Inoltre $A \cap \overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq A \cap W$ per ogni $x \in V$. Dunque

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = \int_{A\cap W} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy \quad \text{ per ogni } x \in V,$$

cosicchè il dominio di integrazione, pur rimanendo limitato, non dipende più da x.

Poichè la funzione $x \mapsto \varphi_\varepsilon(x-y)u(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ per q.o. $y \in A \cap W$ e inoltre

$$\left|\partial_x^\alpha\big(\varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\big)\right| \leq \sup_{(x,y)\in V\times\overline{W}} \left|\partial_x^\alpha\big(\varphi_\varepsilon(x-y)\big)\right||u(y)| \leq C(\alpha,V)|u(y)|$$

dove $C(\alpha, V)$ è una costante dipendente solo da α e V, e poichè la funzione $C(\alpha,V)|u(y)|$ è sommabile sull'insieme limitato $A\cap W$ allora sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di derivazione sotto il segno di integrale da cui segue la parte *1* della tesi.

Per provare la *2* osserviamo che, poichè $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \overline{B(0,\varepsilon)}$, allora

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = \int u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\overline{B(0,\varepsilon)}} u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

Chiaramente

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = 0 \quad \forall\, x \ :\ u(x-y) = 0 \ \forall\, y \in \overline{B(0,\varepsilon)}$$

ma, d'altra parte

$$u(x-y) = 0 \ \forall\, y \in \overline{B(0,\varepsilon)} \ \Leftarrow\ x \notin \operatorname{supp} u + y \ \forall\, y \in \overline{B(0,\varepsilon)}$$

sicchè

$$x \notin \operatorname{supp} u + \overline{B(0,\varepsilon)} \Rightarrow \varphi_\varepsilon * u(x) = 0$$

cioè

$$\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon * u \subseteq \operatorname{supp} u + \overline{B(0,\varepsilon)} = K + \overline{B(0,\varepsilon)}.$$

□

Teorema 6.8 *Sia φ un mollificatore e $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una funzione con supporto in un aperto A di $\mathbb{R}^n$ e di classe $L^p(A)$, $1 \le p < +\infty$. Allora*

1. $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. *se* $\operatorname{supp} u = K$ *è compatto, allora* $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty_{\mathrm{c}}(A)$ *per ogni* $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, A^C)$;
3. $\varphi_\varepsilon * u \in L^p(A)$, $\|\varphi_\varepsilon * u\|_p \le \|u\|_p$;
4. $\varphi_\varepsilon * u \to u$ *in* $L^p(A)$ *per* $\varepsilon \to 0$;
5. *u continua in* $x_0 \Rightarrow \varphi_\varepsilon * u(x_0) \to u(x_0)$ *per* $\varepsilon \to 0$;
6. $u \in C_c(A) \Rightarrow \varphi_\varepsilon * u \to u$ *uniformemente per* $\varepsilon \to 0$.

Dimostrazione Le prime due sono già state provate. La *3* è una conseguenza della disuguaglianza di Hölder e di Tonelli-Fubini. Infatti,

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon * u(x)| &\le \int |\varphi_\varepsilon(x-y)u(y)|\,dy = \int \varphi_\varepsilon(x-y)^{1/p'}\varphi_\varepsilon(x-y)^{1/p}|u(y)|\,dy \\ &\le \Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\Big)^{1/p'}\Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\Big)^{1/p} \end{aligned}$$

e, poichè il primo integrale a secondo membro è uguale a 1 (basta fare il cambiamento di variabile $x-y=y$), allora

$$\int |\varphi_\varepsilon * u(x)|^p\,dx \le \int \Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\Big)\,dx.$$

Scambiando l'ordine di integrazione a secondo membro si ha

$$\int \Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dx\Big)\,dy = \int |u(y)|^p\Big(\int \varphi_\varepsilon(x-y)\,dx\Big)\,dy = \|u\|_p^p < +\infty$$

e la tesi segue dall'applicazione consecutiva dei teoremi di Tonelli e Fubini (cfr. osservazione (6.5)).

Proviamo la *4*. Poiché $C_c(A)$ à denso in $L^p(A)$ allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $g \in C(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto contenuto in A tale che $\|g - u\|_p < \varepsilon$. Si ha quindi, usando anche la precedente *3*,

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * u - u\|_p &\leq \|\varphi_\varepsilon * u - \varphi_\varepsilon * g\|_p + \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_p + \|g - u\|_p \leq \\ &\leq 2\|g - u\|_p + \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_p < 2\varepsilon + \|\varphi_\varepsilon * g - g\|_p, \end{aligned}$$

pertanto basta dimostrare la *4* nel caso in cui $u \in C_c(A)$. Osserviamo che, siccome $\int \varphi_\varepsilon(x - y)\, dy = 1$, allora

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)| &= \Big| \int \varphi_\varepsilon(x - y) u(y)\, dy - u(x) \Big| = \Big| \int \varphi_\varepsilon(x - y)[u(y) - u(x)]\, dy \Big| \\ &\leq \int_{|x-y|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x - y)|u(y) - u(x)|\, dy \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato usato il fatto che $\varphi_\varepsilon(x - y) = 0$ per ogni $|x - y| \geq \varepsilon$. Poiché u è uniformemente continua, allora, per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta_\eta > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta_\eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \eta.$$

Di qui, utilizzando la stima precedente, si ha

$$|\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)| \leq \eta \int_{|x-y|<\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x - y)\, dy \leq \eta\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Poiché δ_η non dipende da x ciò prova che $\varphi_\varepsilon * u \to u$ uniformemente (per $\varepsilon \to 0$), quindi in particolare risulta provata la *6*. Ne consegue che vi è anche convergenza in L^p, cosa che può anche essere provata direttamente osservando che, poiché $u \in C_c(A)$, esiste $a > 0$ tale che $\operatorname{supp} u \subseteq B(0, a)$, dove $B(0, a)$ denota la palla di $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio a. Per la *2* del teorema 6.8, allora

$$\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon * u \subseteq B(0, a + \varepsilon)$$

e quindi

$$\int |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|^p\, dx = \int_{B(0,a+\varepsilon)} |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|^p\, dx \leq |B(0, a + \varepsilon)|\varepsilon^p$$

e la *4* segue dunque passando al limite per $\varepsilon \to 0$. La *5* si dimostra analogamente usando la continuità in x_0 in luogo della continuità uniforme. □

Bibliografia

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[2] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.