

Capitolo 5

Topologie deboli

Topologia debole

Sia X uno spazio di Banach. La continuità delle applicazioni lineari $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dipende, per definizione, dalla topologia che si considera su X . Abbiamo definito lo spazio duale X^* come l'insieme di tutte le funzioni lineari $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ che sono continue quando su X si considera la topologia della norma. Se indeboliamo la topologia su X , la continuità di una funzione può essere conservata oppure no. Si consideri ad esempio il caso della funzione costantemente uguale a zero $f(x) = 0$ per ogni $x \in X$. Questa funzione è continua quando su X c'è la topologia della norma ma anche quando su X consideriamo la topologia banale.

Definizione 5.1 La topologia debole $\sigma(X, X^*)$ su X è la più debole tra le topologie su X che rendono continui tutti gli elementi di X^* .

Si potrebbe dimostrare (Brezis [1], Proposition III.4) che un sistema fondamentale di intorni di x_0 per la topologia debole è costituita da tutti gli insiemi della forma

$$W = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon \forall i \in I\}$$

dove I è un qualunque insieme finito di indici, $f_i \in X^*$ e $\varepsilon > 0$.

Osservazione 5.2 Si osserva che ciascuna delle disuguaglianze $|\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon$ definisce una regione (illimitata) compresa tra due iperpiani paralleli. Se la dimensione dello spazio X non è finita, un numero finito di iperpiani non può definire una regione limitata. In tal caso non vi sono intorni di zero limitati. Se vi fosse un intorno di x_0 limitato allora lo spazio avrebbe dimensione finita e la topologia debole coinciderebbe con quella della norma.

Data una successione (x_n) di elementi di X , diremo che essa *converge ad x debolmente*, e scriveremo

$$x_n \rightharpoonup x$$

se converge nella topologia $\sigma(X, X^*)$. Diremo che $x_n \rightarrow x$ *fortemente* e scriveremo

$$x_n \rightarrow x$$

se converge nella topologia della norma, cioè se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

La seguente proposizione riassume le principali proprietà della convergenza debole.

Proposizione 5.3 Sia x_n una successione di elementi di X . Si ha

1. $x_n \rightharpoonup x \iff \langle \varphi, x_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle \forall \varphi \in X^*$;
2. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x_n \rightarrow x$;
3. se $x_n \rightharpoonup x$ allora $\|x_n\|$ è limitata e $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$;
4. se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \rightarrow f$ in X^* allora $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

DIMOSTRAZIONE 1. \Rightarrow è conseguenza diretta della definizione e del fatto che la continuità implica la continuità sequenziale.

\Leftarrow Sia U un intorno di x per la topologia debole. Allora esiste un elemento W del sistema fondamentale contenuto in U , cioè esistono un insieme finito di indici I , delle funzioni $f_i \in X^*$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$W = \{y \in X : |\langle f_i, y - x \rangle| < \varepsilon \forall i \in I\} \subseteq U.$$

Poichè $\langle f_i, x_n \rangle \rightarrow \langle f_i, x \rangle$, allora $\langle f_i, x_n - x \rangle \rightarrow 0$ e perciò per ogni $i \in I$ esiste $N_i \in \mathbb{N}$ tale che $\langle f_i, x_n - x \rangle < \varepsilon$ per ogni $n > N_i$. Preso $N = \max_{i \in I} N_i$ si ha allora $x_n \in U$ per ogni $n > N$, e quindi $x_n \rightarrow x$.

2. Segue dalla precedente e dal fatto che $|\langle \varphi, x_n \rangle - \langle \varphi, x \rangle| \leq \|\varphi\| \|x_n - x\|$.

3. La limitatezza della successione $(\|x_n\|)$ è la cosa meno banale da provare. Infatti $x_n \rightharpoonup x$ implica (per quanto già provato in 1.) che $\langle \varphi, x_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle \forall \varphi \in X^*$. Ne consegue che per ogni $\varphi \in X^*$ la successione $(\langle \varphi, x_n \rangle)_n$ è limitata, cioè esiste una costante C_φ tale che

$$|\langle \varphi, x_n \rangle| \leq C_\varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se potessimo affermare che la costante C_φ si può scegliere indipendentemente da φ , cioè esiste C tale che

$$|\langle \varphi, x_n \rangle| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in X^*,$$

cioè che la limitatezza della successione è uniforme rispetto a φ , allora la tesi sarebbe facilmente provata perchè

$$\|x_n\| = \sup\{|\langle \varphi, x_n \rangle| : \|\varphi\| \leq 1\} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La desiderata proprietà di limitatezza uniforme, non facile da dimostrare, è stabilita da uno dei più importanti teoremi dell'Analisi Lineare:

Teorema 5.4 (Banach-Steinhaus o di limitatezza uniforme) Sia X uno spazio di Banach e sia $\{F_j\}_{j \in J}$ una famiglia (qualunque) di funzioni lineari e continue da X in \mathbb{R} .

$$\sup_{j \in J} |F_j x| < +\infty \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \sup_{j \in J} \|F_j\| < +\infty.$$

Nel caso in esame si prende $F_j(\varphi) = |\langle \varphi, x_j \rangle|$, sicchè $F_j : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ e si usa il fatto che X^* è uno spazio di Banach. **Esercizio:** mostrare con semplici esempi che il teorema di Banach-Steinhaus non vale se si rinuncia all'ipotesi di linearità.

Rimane da provare la semicontinuità della norma. Poichè $|\langle \varphi, x_n \rangle| \leq \|\varphi\| \|x_n\|$, passando al liminf ambo i membri si ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\langle \varphi, x_n \rangle| \leq \|\varphi\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

e poichè $x_n \rightharpoonup x$ e per la continuità del valore assoluto il primo membro è uguale a $|\langle \varphi, x \rangle|$ e perciò, dividendo per $\|\varphi\|$ si ha

$$\frac{|\langle \varphi, x \rangle|}{\|\varphi\|} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

e la tesi si ottiene passando al sup su φ .

4. Basta osservare che si ha

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &\leq |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \\ &\leq \|f_n - f\| \|x_n\| + |\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \end{aligned}$$

e passare al limite per $n \rightarrow \infty$. \square

Osservazione 5.5 Si potrebbe dimostrare che la topologia debole non è metrizzabile, a meno che lo spazio vettoriale X non abbia dimensione finita, nel qual caso la topologia debole coincide con quella della norma (esempio \mathbb{R}^n). Quindi i vari concetti di compattezza, continuità, ecc... rispetto alla topologia debole possono differire da quelli di sequenziale compattezza, sequenziale continuità, ecc...

Topologia debole*

Sia X uno spazio di Banach e X^* il suo duale. Si può poi considerare il duale di X^* , cioè lo spazio X^{**} . Ad ogni elemento $x \in X$ si può associare l'elemento Jx di X^{**} definito come segue

$$\begin{aligned} Jx : X^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle Jx, \varphi \rangle = \langle \varphi, x \rangle \end{aligned}$$

e si ha

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \sup\{|\langle Jx, \varphi \rangle| : \|\varphi\| \leq 1\} = \sup\{|\langle \varphi, x \rangle| : \|\varphi\| \leq 1\} = \|x\|_X.$$

Resta dunque definita un'isometria lineare

$$\begin{aligned} J : X &\rightarrow X^{**} \\ x &\mapsto Jx, \end{aligned}$$

che permette di identificare X con un sottospazio di X^{**} ; in tal senso cioè $X \subseteq X^{**}$. Se J è anche suriettiva (cosa che non succede sempre) allora si può identificare X con X^{**} e si dice che X è uno spazio *riflessivo*.

Analogamente a quanto fatto per la topologia $\sigma(X, X^*)$, per ogni $Y \subseteq X^*$ si può definire la topologia $\sigma(X, Y)$ come la più debole tra le topologie che rendono continui gli elementi di Y . Così sullo spazio X^* possiamo considerare la topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$ oppure anche la topologia $\sigma(X^*, X)$ (considerando $X \subseteq X^{**}$) che, per distinguerla dalla precedente, prende il nome di *topologia debole**. Naturalmente le due topologie coincidono se $X = X^{**}$.

Un sistema fondamentale di intorni di $f_0 \in X^*$ per la topologia debole* è costituito dagli insiemi della forma

$$V = \{f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon \forall i \in I\}$$

dove I è un insieme finito, $x_i \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Per indicare che una successione (f_n) di elementi di X^* converge debolmente* ad un limite f scriveremo

$$f_n \xrightarrow{*} f$$

La seguente proposizione riassume le proprietà della convergenza debole*, analoghe a quelle della convergenza debole.

Proposizione 5.6 *Sia f_n una successione di elementi di X^* . Si ha*

1. $f_n \xrightarrow{*} f \iff \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall x \in X$;
2. $f_n \rightarrow f$ (i.e. in $\sigma(X^*, X^{**})$) $\Rightarrow f_n \xrightarrow{*} f$; in particolare la convergenza forte implica la debole*;
3. se $f_n \xrightarrow{*} f$ allora $\|f_n\|$ è limitata e $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$;
4. se $f_n \xrightarrow{*} f$ e $x_n \rightarrow x$ in X allora $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Osservazione 5.7 Se $f_n \xrightarrow{*} f$ e $x_n \rightarrow x$, in generale non si ha che $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$. Esempi concreti verranno visti negli spazi L^p .

Se X ha dimensione finita allora le tre topologie coincidono. Per le topologie deboli valgono i seguenti teoremi di compattezza utili nella risoluzione di problemi di minimo; le dimostrazioni si trovano in Brezis [1].

Teorema 5.8 (Alaoglu) *La palla chiusa $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ è compatta per la topologia debole*.*

Teorema 5.9 (Kakutani) *Sia X uno spazio di Banach. X è riflessivo se e solo se la palla chiusa $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ è compatta per la topologia debole.*

Metrizzabilità e compattezza sequenziale nelle topologie deboli.

Anche se le topologie deboli non sono mai metrizzabili, quando gli spazi in considerazione godono di opportune proprietà di separabilità i sottoinsiemi limitati si possono dotare di una metrica che induce la topologia debole o debole*. Vale in proposito il seguente teorema per la cui dimostrazione si può vedere Brezis [1], Théorème III.25 e III.25' (vedi anche Dunford e Schwartz [3], teoremi V.5.1, V.6.3 e successiva osservazione e Dal Maso [2] Proposition 8.7).

Teorema 5.10 *Sia X uno spazio di Banach. Allora*

- (i) *le palle di X sono debolmente metrizzabili se e solo se X^* è separabile;*
- (ii) *le palle di X^* sono debolmente* metrizzabili se e solo se X è separabile.*

Come conseguenza dei teoremi 5.8, 5.9 e 5.10 si ha che

1. se X^* è separabile e X è riflessivo allora le palle chiuse di X sono sequenzialmente debolmente compatte;
2. se X è separabile allora le palle chiuse di X^* sono sequenzialmente debolmente* compatte.

La 1. è generalizzabile a tutti i sottoinsiemi convessi, limitati (cioè contenuti in una palla) e chiusi di X utilizzando il seguente teorema.

Teorema 5.11 *Sia $C \subseteq X$ convesso. C è debolmente chiuso se e solo se è fortemente chiuso.*

Poichè, per definizione di topologia debole, ogni insieme debolmente chiuso è anche fortemente chiuso, la parte non banale del teorema è la \Leftarrow . La dimostrazione usa il Teorema di Hahn-Banach.

Una proprietà analoga alla 2. vale per tutti i sottoinsiemi convessi, limitati (cioè contenuti in una palla) e *debolmente** chiusi di X (in questo caso però non c'è l'equivalenza tra chiusura forte e chiusura debole*: vedi ad esempio Brezis [1], Capitolo III, Remarque 11).¹

Inoltre, per funzioni convesse su uno spazio di Banach valgono i risultati seguenti.

Teorema 5.12 *Sia X uno spazio di Banach, e sia $F : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. Allora, indicata con s la topologia forte, w la topologia debole e w^* quella debole*, si ha:*

1. F è s -s.c.i. $\iff F$ è w -s.c.i.;
2. se X^* è separabile,
 F è w -s.c.i. $\iff F$ è seq. w -s.c.i.;
3. se $X = V^*$ con V spazio di Banach separabile
 F è w^* -s.c.i. $\iff F$ è seq. w^* -s.c.i..

Applicazione a problemi di minimo

Teorema 5.13 *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Se*

1. F è debolmente semicontinua inferiormente,
2. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$,

allora esiste il minimo di F su X .

DIMOSTRAZIONE Se F è identicamente $+\infty$ non c'è nulla da provare. Supponiamo dunque che esista $x_0 \in X$ tale che $F(x_0) < +\infty$. Per la 2. si ha che esiste $R > 0$ tale che $F(x) > F(x_0)$ per ogni $\|x\| > R$ e pertanto

$$\inf_X F = \inf_{B_R} F$$

dove $B_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$. Poichè B_R è compatto e chiuso e F è semicontinua inferiormente la tesi segue dal teorema di Weierstrass. \square

Osservazione 5.14 L'ipotesi 2. è in particolare soddisfatta se esistono tre costanti $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\gamma > 0$ tali che $F(x) \geq \alpha\|x\|^\gamma - \beta$.

Analogamente si potrebbe dimostrare il seguente teorema

Teorema 5.15 *Sia X uno spazio normato e sia $F : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Se*

1. F è debolmente* semicontinua inferiormente,
2. $\lim_{\|\varphi\|_{X^*} \rightarrow +\infty} F(\varphi) = +\infty$,

allora esiste il minimo di F su X^ .*

¹È appena il caso di osservare che le palle chiuse sono debolmente* chiuse perchè sono debolmente* compatte e metrizzabili, e i compatti, negli spazi metrici, sono chiusi.

Dualità e convergenze deboli negli spazi L^p .

Se $p = 2$ vale il teorema di Riesz per gli spazi di Hilbert che per $H = L^2$ assume la forma seguente.

Teorema 5.16 $T \in (L^2(\Omega))^*$ se e solo se esiste (ed è unica) $u \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx \text{ per ogni } \varphi \in L^2(\Omega).$$

Inoltre si osserva che $\|T\| = \|u\|_2$. Ne consegue che la corrispondenza $T \mapsto u$ definisce un'isometria suriettiva tra $(L^2)^*$ e L^2 . Ciò consente di identificare $(L^2)^*$ con L^2 .

Negli spazi L^{p^2} vale il seguente teorema di rappresentazione dimostrato su Brezis.

Teorema 5.17 Sia $1 \leq p < +\infty$. Sia $T \in (L^p(\Omega))^*$. Allora esiste un'unica $u \in L^{p'}(\Omega)$ con p' esponente coniugato³ di p , tale che

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx \text{ per ogni } \varphi \in L^p(\Omega).$$

Inoltre si ha che $\|T\| = \|u\|_{p'}$.

Ne consegue che la corrispondenza $T \mapsto u$ definisce un'isometria suriettiva tra $(L^p)^*$ e $L^{p'}$ che consente di identificare $(L^p)^*$ con $L^{p'}$.

Se si passa ai biduali si scopre che L^p è riflessivo per ogni $1 < p < +\infty$. Per quanto riguarda la riflessività e la separabilità degli spazi L^p e la caratterizzazione del duale abbiamo la seguente tabella riassuntiva (vedi Brezis [1] IV.3)

L^p ($1 < p < \infty$)	riflessivo	separabile	duale: $L^{p'}$
L^1	non riflessivo	separabile	duale: L^∞
L^∞	non riflessivo	non separabile	$(L^\infty)^* \supset L^1$

Lo spazio L^∞ ha un ruolo speciale. Per il teorema precedente esso è duale di L^1 che è separabile. Il duale di L^∞ è di difficile descrizione. Però le palle chiuse sono debolmente* compatte (teorema di Alaoglu) e metrizzabili (quindi compatte per successioni).

Per le 1. delle proposizioni 5.3 e 5.6, le convergenze deboli negli spazi $L^p(\Omega)$ e debole* in $L^\infty(\Omega)$ hanno le seguenti caratterizzazioni

$$\begin{aligned} f_n \rightharpoonup f &\iff \int_{\Omega} f_n(x)g(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty \\ f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f &\iff \int_{\Omega} f_n(x)g(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega), \quad p = \infty \end{aligned}$$

Per i teoremi di Kakutani e di Alaoglu, si ha che

² $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, è definito come lo spazio delle funzioni u tali che $\int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty$ modulo la relazione di equivalenza che identifica funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla secondo Lebesgue. Se $p = +\infty$, $L^\infty(\Omega)$ è definito come lo spazio delle funzioni u essenzialmente limitate, cioè limitate a meno di un insieme di misura nulla, modulo la solita relazione di equivalenza. Se $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ si può dotare della norma $\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{1/p}$ mentre L^∞ si può dotare della norma $\|u\|_\infty = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ q. o. in } \Omega\}$, dove "q. o." sta per "quasi ovunque" che precisamente significa "ad eccezione di un insieme di misura nulla secondo Lebesgue". Rispetto a queste norme gli spazi $L^p(\Omega)$ sono completi per ogni $p \in [1, +\infty]$ (cfr. Brezis [1], Théorème IV.8, oppure Rudin [5], Teorema 3.11). $L^p(\Omega)$ è quindi uno spazio di Banach. Nel caso $p = 2$ è anche di Hilbert.

³Dato $p \in (1, +\infty)$ si chiama esponente coniugato o duale di p il numero $p' \in (1, +\infty)$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si definisce, inoltre, $1' := +\infty$.

- $\|f_n\|_p \leq C \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 < p < \infty) \Rightarrow \exists f_{n_k} \rightharpoonup f \text{ in } L^p$
- $\|f_n\|_\infty \leq C \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists f_{n_k} \xrightarrow{*} f \text{ in } L^\infty$

Per contro,

- $\|f_n\|_1 \leq C \forall n \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \exists f_{n_k} \rightharpoonup f \text{ in } L^1;$

vedremo più avanti un esempio in tal senso.

Due utili criteri di compattezza debole in $L^1(\Omega)$ sono riassunti nel seguente teorema.

Teorema 5.18 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n e sia $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

- \mathcal{H} è relativamente⁴ debolmente compatto in L^1 ;
- (criterio di Dunford-Pettis) \mathcal{H} è uniformemente integrabile, cioè \mathcal{H} è limitato in L^1 e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |B| < \delta \Rightarrow \int_B |u| dx < \varepsilon \forall u \in \mathcal{H};$$

- (criterio di De la Vallée-Poussin) esiste una funzione $\theta : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ (θ può essere presa convessa e crescente) tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\theta(t)}{t} = +\infty \quad \text{e} \quad \sup \left\{ \int_\Omega \theta(|u|) dx : u \in \mathcal{H} \right\} < +\infty.$$

Abbiamo visto che la convergenza debole non implica la forte. Questo però accade se oltre alla convergenza debole vi è anche convergenza delle norme, come precisato dal seguente teorema.

Teorema 5.19 *Sia $1 < p < +\infty$ e $f_n \rightharpoonup f$ in L^p . Se inoltre $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, allora $f_n \rightarrow f$ in L^p .*

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione è molto semplice nel caso $p = 2$ in cui si ha

$$\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 - 2\langle f_n, f \rangle + \|f\|^2$$

e basta quindi passare al limite per $n \rightarrow \infty$ per ottenere la tesi. Per il caso del generico p si rimanda a Riesz e Nagy [4], § 37. \square

È appena il caso di osservare che non basta che $\|f_n\|$ sia limitata per concludere che esiste una sottosuccessione fortemente convergente (infatti ogni successione debolmente convergente è limitata).

Esercizio 5.20 *Mostrare con un esempio che il precedente teorema non vale se $p = 1$ o $p = +\infty$.*

Nel caso $p = 1$ un controesempio è dato dalla successione $f_n(x) = \sin^2(2\pi nx)$ che converge debolmente alla costante $1/2$ (media di f_n su $(0, 1)$) e $\|f_n\|_1 = 1/2$ per ogni n , ma non ammette alcuna sottosuccessione convergente in L^1 (altrimenti vi sarebbe una sottosuccessione convergente quasi ovunque).

Nel caso $p = +\infty$ un controesempio è dato dalla successione

$$f_n(x) = \begin{cases} (2x)^n & \text{se } x \in (0, 1/2) \\ 1 & \text{se } x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

⁴Cioè la chiusura di \mathcal{H} è compatta.

che converge debolmente (perché quasi ovunque) alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1/2) \\ 1 & \text{se } x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

e $\|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ per ogni n , ma non ammette alcuna sottosuccessione convergente in L^∞ (altrimenti f dovrebbe essere continua come limite uniforme di una successione di funzioni continue).

Bibliografia

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
- [2] G. Dal Maso, *An introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [3] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, vol. 1, general theory*, Interscience Publ. Ltd. N.Y., 1958.
- [4] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing, New York, 1955.
- [5] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.