Capitolo 4

Spazi normati, funzioni lineari e spazio duale

Spazi Metrici

Ricordiamo che uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, +\infty[$ è una funzione, detta *metrica*, che gode delle seguenti proprietà

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$;
3. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)\ \forall x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Esempio 4.1 Su ogni insieme X la funzione

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una metrica (detta *metrica banale*).

Esempio 4.2 Su $\mathbb{R}^n$ la funzione

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

è una metrica (detta *metrica euclidea*).

Esempio 4.3 Su $\mathbb{R}^n$ le funzioni

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad d_2(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\ :\ i = 1, \dots, n\}$$

sono metriche.

In uno spazio metrico (X, d) l'insieme

$$S(x_0, r) = \{x \in X\ :\ d(x, x_0) = r\}, \quad x_0 \in X,\ r > 0$$

è la superficie sferica (o sfera) di raggio r, mentre l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in X \ : \ d(x, x_0) < r\}, \quad x_0 \in X, \, r > 0$$

è la palla aperta di centro x_0 e raggio r.

In uno spazio metrico le famiglie

$$\{B(x, r) \ : \ x \in X, \, r > 0\},$$

$$\{B(x, r) \ : \ x \in X, \, r > 0, r \in \mathbb{Q}\},$$

$$\{B(x, 1/n) \ : \ x \in X, \, n \in \mathbb{N}\}$$

sono sistemi fondamentali di intorni e pertanto ne individuano la topologia. Ciò implica in particolare che ogni spazio metrico soddisfa al primo assioma di numerabilità. Ad una metrica è quindi sempre associata una topologia, ma non viceversa, cioè esistono topologie che non sono descrivibili da una metrica, cioè non sono *metrizzabili.* Inoltre metriche diverse possono individuare la stessa topologia, e in tal caso si dicono *topologicamente equivalenti.* Per esempio le metriche d_1 e d_2 dell'Esempio 4.3 inducono entrambe la topologia euclidea, cioè definiscono gli stessi insiemi aperti. Per dimostrare che due metriche d_1 e d_2 sono equivalenti basta mostrare che per ogni palla $B(x, \varepsilon_1)$ di (X, d_1) esiste una palla $B(x, \varepsilon_2)$ di (X, d_2) contenuta in $B(x, \varepsilon_1)$ e viceversa.

Esercizio 4.4 *Disegnare le palle di centro 0 e raggio 1 in* $(\mathbb{R}^2, d_1)$ *e in* $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Esempio 4.5 Nella metrica banale dell'esempio 4.1 si ha

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } r \leq 1 \\ X & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.6 *Scrivere le definizioni di successione convergente, di funzione continua e sequenzialmente continua in uno spazio metrico* (X, d) *e ricordare che, poichè gli spazi metrici soddisfano al primo assioma di numerabilità allora la continuità equivale alla continuità sequenziale.*

Spazi normati

Ricordiamo che uno *spazio normato* (su $\mathbb{R}$) è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ dove X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty[$ è una funzione, detta *norma*, che gode delle seguenti proprietà

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \, x \in X$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in X$.

Una norma su X induce sempre una metrica

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

e pertanto definisce una topologia. La norma di un punto x rappresenta dunque la sua distanza dall'origine mentre la norma di un vettore rappresenta la sua lunghezza.

Esempio 4.7 In $\mathbb{R}^n$ la norma

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}$$

induce la metrica euclidea ed è pertanto detta *norma euclidea.* Altre norme che inducono la stessa topologia (ma non la stessa metrica) sono

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \text{e} \qquad \max\{|x_i| \ : \ i = 1, \dots, n\}.$$

Esempio 4.8 Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. La funzione

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

è una norma nello spazio delle funzioni sommabili $L^1(\Omega)$ (è importante, qui, affinchè valga la prima proprietà della norma, identificare funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla). Questa è una norma anche nello spazio delle funzioni continue a supporto compatto $C_c(\Omega)$.

La funzione

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

è una norma nello spazio $B(\Omega)$ delle funzioni limitate su Ω, ma non lo è in $L^1(\Omega)$. $\|\cdot\|_\infty$ è una norma in $C_c(\Omega)$, o anche in $C_c^k(\Omega)$, mentre un'altra norma in $C_c^1(\Omega)$ è la seguente

$$\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty.$$

Definizione 4.9 *Due norme* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_2$ *sullo stesso spazio* X *si dicono* equivalenti *se inducono la stessa topologia.*

È subito visto che due norme sono equivalenti se e solo se generano metriche equivalenti, cioè, dette $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ le due norme, se e solo se esistono due costanti positive c e C tali che

$$c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$$

per ogni $x \in X$.

Esercizio 4.10 *Mostrare che nello spazio* $C_0^1([0,1])$ *delle funzioni* $C^1([0,1])$ *tali che* $u(0) = u(1) = 0$*, le norme* $\|u'\|_\infty$ *e* $\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ *sono equivalenti.*

Poichè

$$\|u'\|_\infty \le \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty = \|u\|_{1,\infty}$$

basta mostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$c\|u\|_\infty \le \|u'\|_\infty$$

(infatti in tal caso si avrebbe $\frac{c}{1+c}\|u\|_{1,\infty} \le \|u'\|_\infty$). Per provarlo basta osservare che

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt$$

e pertanto

$$|u(x)| \le \Big|\int_0^x |u'(t)|\, dt\Big| \le \Big|\int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} \|u'(t)\|_\infty\, dt\Big| = \|u'\|_\infty.$$

La tesi segue dunque passando al sup sugli $x \in [0,1]$. Concludiamo osservando che la condizione $u(1) = 0$ non è stata utilizzata.

Funzionali lineari. Spazio duale

Osserviamo che la convergenza debole introdotta nel capitolo precedente è la convergenza più debole che rende continui tutti i prodotti scalari con funzioni di L^2. Per il teorema di rappresentazione di Riesz, d'altra parte, i prodotti scalari sono esattamente tutte e sole le funzioni lineari e fortemente continue $L^2 \to \mathbb{R}$. Possiamo quindi dire che la convergenza debole è la più debole tra le convergenze che rendono continue tutte le applicazioni lineari e fortemente continue $L^2 \to \mathbb{R}$.

La trasposizione topologica di questo concetto conduce alla nozione di topologia debole. Poiché le funzioni lineari e continue giocano un ruolo essenziale ricordiamo alcune cose fondamentali su di esse.

Quando il dominio X è $\mathbb{R}^n$ vale la seguente proposizione.

Proposizione 4.11 *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare se e solo se è un prodotto scalare, cioè se e solo se esiste $a \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = \langle a, x\rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

DIMOSTRAZIONE Se $f(x) = \langle a, x\rangle$, allora è ovviamente lineare. Viceversa, supponiamo che f sia lineare e non identicamente nulla (altrimenti basta prendere $a = 0$). In tal caso $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = 0\} \neq \mathbb{R}^n$, cioè esiste $x_0 \in \ker f^{\perp}$ tale che $f(x_0) \neq 0$ (quindi anche $x_0 \neq 0$).

Per farci venire un'idea su come procedere consideriamo dapprima il caso $n = 1$ e cerchiamo $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = ax$. Poiché quest'ultima deve valere anche per $x = x_0 \neq 0$ allora si ha $a = f(x_0)/x_0$. Si deve ora provare che

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0}x, \quad \text{cioè} \quad x_0 f(x) - f(x_0)x = 0$$

e ciò è vero per la linearità di f. Nel caso generale partiamo proprio dal vettore $x_0 f(x) - f(x_0)x$ e osserviamo che, per la linearità

$$f(x_0 f(x) - f(x_0)x) = 0.$$

Dunque $x_0 f(x) - f(x_0)x \in \ker f$ e quindi

$$\langle x_0 f(x) - f(x_0)x, x_0\rangle = 0$$

da cui, sviluppando il prodotto scalare a primo membro, si ottiene

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2}\langle x_0, x\rangle.$$

□

Come conseguenza, in $\mathbb{R}^n$ tutte le applicazioni lineari sono continue, perché tutte le lineari sono prodotti scalari e se $f(x) = \langle a, x\rangle$ allora, per Cauchy-Schwarz, si ha

$$|f(x)| \leq \|a\|\|x\|$$

e quindi f è continua (lipschitziana) per la topologia della norma.

A differenza di $\mathbb{R}^n$, in spazi vettoriali di dimensione infinita esistono sempre funzioni lineari $f : X \to \mathbb{R}$ non continue. Diamo subito un esempio.

Esempio 4.12 Consideriamo lo spazio delle funzioni continue $C([-1, 1])$ con la norma $\|u\|_1 = \int_{-1}^{1} |u|\, dt$. La funzione

$$\begin{aligned} \delta_0 : C([-1,1]) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \delta_0(\varphi) = \varphi(0) \end{aligned}$$

è lineare (ovviamente) ma non è continua. Si consideri infatti la successione di funzioni $\varphi_n \in C([-1,1])$ tale che $\varphi_n(0) = 1$ e $\varphi_n(x) = 0$ per ogni $|x| \geq 1/n$ e prolungata linearmente su $[-1,1]$. Si ha

$$\|\varphi_n\|_1 = \int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(x)\,dx = 1/n \to 0 \text{ per } n \to \infty.$$

Dunque $\varphi_n \to 0$ in norma. Ora, se δ_0 fosse continua allora si avrebbe

$$\delta_0(\varphi_n) \to \delta_0(0)$$

ma questo non è possibile perché $\delta_0(\varphi_n) = 1$ per ogni n mentre $\delta_0(0) = 0$.

Per la disuguaglianza di Schwarz d'altra parte i prodotti scalari sono continui. Abbiamo già ricordato, infatti, che se il dominio X è uno spazio di Hilbert allora vale il seguente teorema di rappresentazione di Riesz.

Teorema 4.13 *Sia X uno spazio di Hilbert. $f : X \to \mathbb{R}$ è lineare e continua se e solo se è un prodotto scalare, cioè se e solo se esiste (ed è unico) $a \in X$ tale che $f(x) = \langle a, x\rangle$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione La dimostrazione procede essenzialmente come quella in cui $X = \mathbb{R}^n$ e la continuità viene usata per garantire che il nucleo di f sia chiuso, cosa che, per il teorema della proiezioni, implica che l'ortogonale, non coincidendo con l'intero spazio non si riduce al solo 0. □

Osserviamo che se $X = L^2$ allora il teorema di Riesz dice che ogni funzionale $F : L^2 \to \mathbb{R}$ lineare e fortemente continuo ammette la rappresentazione integrale

$$F(u) = \int g(x)u(x)\,dx$$

dove g è un'opportuna funzione di L^2 e si tratta quindi di un teorema di rappresentazione integrale.

Se X è solamente uno spazio vettoriale normato, ma in cui la norma non proviene da un prodotto scalare, vale il risultato seguente.

Proposizione 4.14 *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione lineare. f è continua se e solo se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|f(x)| \leq L\|x\| \quad \textit{per ogni } x \in X. \tag{4.1}$$

Dimostrazione L'unica parte non banale è $\Rightarrow$. Supponiamo dunque f continua. In particolare f è continua in 0, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0\ :\ \|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

In particolare, in corrispondenza ad $\varepsilon = 1$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1.$$

Sia x' qualunque, diverso da 0. Preso $x = \frac{\delta x'}{2\|x'\|}$ si ha $\|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e pertanto $|f(x)| < 1$. Ma d'altra parte $|f(x)| = \frac{\delta f(x')}{2\|x'\|}$ e perciò $\frac{|f(x')|}{\|x'\|} < \frac{2}{\delta} = L$. □

Osservazione 4.15 Anche negli spazi normati le funzioni lineari e continue sono lipschitziane.

Dato uno spazio vettoriale normato $(X, \|\cdot\|)$, un altro importante esempio di spazio normato che si può costruire a partire da X è il cosiddetto *spazio duale* di X, X^*, costituito da tutte le funzioni lineari e continue $\varphi : X \to \mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione con un numero reale. Una norma in questo spazio è data dalla più piccola costante per cui vale la (4.1), cioè

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{X^*} &= \sup\{\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \ : \ x \in X,\, x \neq 0\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| \ : \ x \in X,\, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| \ : \ x \in X,\, \|x\| = 1\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

dove l'ultima uguaglianza segue osservando che per la linearità $\varphi(0) = 0$ e $0 < \|x\| \leq 1$ $\Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(x/\|x\|)$.

Con questa definizione e usando la notazione $\langle \varphi, x\rangle := \varphi(x)$ si può quindi scrivere

$$|\langle \varphi, x\rangle| \leq \|\varphi\|\|x\|,$$

formalmente analoga alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Osservazione 4.16 Osserviamo che se per una funzione lineare $\varphi : X \to \mathbb{R}$ risulta che uno dei sup della (4.2) è finito (e quindi tutti sono finiti) allora, in base alla proposizione (4.14), la funzione risulta anche continua e il sup coincide con la norma.

Esercizio 4.17 Dimostrare che se X è di Hilbert e $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$ allora $\|\varphi\| = |a|$.

Teorema di Hahn-Banach

Negli spazi normati ogni funzione lineare e continua definita su un sottospazio si può estendere ad una funzione lineare e continua su tutto lo spazio senza incrementarne la norma.

Teorema 4.18 *Sia X uno spazio vettoriale normato e M un sottospazio di X (cioè un sottoinsieme di X chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare). Sia*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

una funzione lineare e continua.

Esiste una funzione lineare e continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tale che

1. $\widetilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in M$;
2. $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.

La dimostrazione di questo teorema (che non faremo) fa uso dell'Assioma della Scelta.

Una sua importante conseguenza è la seguente formula "duale" della (4.2)

$$\begin{aligned} \|x\| &= \max\{\frac{|\langle \varphi, x\rangle|}{\|\varphi\|} \ : \ \varphi \in X^*\} \\ &= \max\{|\langle \varphi, x\rangle| \ : \ \varphi \in X^*,\, \|\varphi\| = 1\} \end{aligned} \qquad \forall x \in X.$$

Infatti, se $x = 0$ la formula è vera. Supponiamo $x \neq 0$. Siccome $|\langle \varphi, x\rangle| \leq \|\varphi\|\|x\|$ allora

$$\sup\{\frac{|\langle \varphi, x\rangle|}{\|\varphi\|} \ : \ \varphi \in X^*\} \leq \|x\|.$$

La formula sarà dunque provata se dimostreremo che esiste $\varphi \in X^*$ tale che

$$\|\varphi\| = \|x\| \ \text{ e } \ \langle \varphi, x\rangle = \|x\|^2. \tag{4.3}$$

A tal scopo sia $M = \langle x\rangle = \{tx \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ il sottospazio di X generato da x. Su questo sottospazio consideriamo la funzione lineare e continua

$$\varphi(tx) = t\|x\|^2;$$

questa funzione per il momento è definita solo su M e soddisfa le (4.3). Ma per il Teorema di Hahn-Banach essa si può prolungare su tutto X ad una φ che soddisfa ancora le condizioni (4.3). □

Spazi metrici completi

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 4.19 *Una successione (x_n) di elementi di X si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m > n_\varepsilon$.*

Si dimostra facilmente che ogni successione convergente è anche di Cauchy. Il viceversa non è vero, in generale. Per esempio è falso in $\mathbb{Q}$ come sottospazio topologico di $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Quello che comunque si riesce a dimostrare in generale è che ogni successione di Cauchy è limitata (procedere come in Analisi 1).

Definizione 4.20 *Uno spazio metrico X si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente ad un punto di X.*

Esempio 4.21 $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea è completo, mentre $\mathbb{Q}$ non lo è.

Gli spazi normati che sono completi rispetto alla metrica indotta dalla norma si dicono *spazi di Banach.*

Esempio 4.22 $\big(L^1(\Omega), \|\cdot\|_1\big)$ è uno spazio di Banach. Se Ω è compatto $\big(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty\big)$ e $\big(C^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\infty}\big)$ sono spazi di Banach.

Esercizio 4.23 Mostrare che

1. $\big(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$ è normato ma non è completo.
2. $C_c(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_1$ o con la norma $\|\cdot\|_\infty$ non è completo.

Proposizione 4.24 *Sia X uno spazio vettoriale normato.*[1] *X^* con la norma duale è di Banach.*

[1] Anche non completo.

Dimostrazione Dimostriamo che X^* è completo. Sia dunque (T_n) una successione di Cauchy in X^*, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_m - T_n\| < \varepsilon$ per ogni $m, n > n_\varepsilon$. Per definizione di norma duale allora per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ si ha anche $|T_m x - T_n x| < \varepsilon$. Ne consegue che per tali x la successione $(T_n x)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi è convergente ($\mathbb{R}$ è completo). Detto Tx il suo limite, che per il momento è definito solo sulla palla unitaria, ed estesolo a tutto lo spazio tramite l'uguaglianza $T(x) = \|x\|T(x/\|x\|)$ è facile verificare che T è lineare. Basta ora provare che $\|T_n - T\| \to 0$, perché da ciò segue anche che T è continua. Infatti, essendo

$$|Tx| \leq |Tx - T_n x| + |T_n x|$$

allora

$$\sup\{|Tx| \ : \ \|x\| \leq 1\} \leq \|T - T_n\| + \|T_n\|$$

e poichè la successione $(\|T_n\|)$ è limitata (essendo di Cauchy) allora si ha che

$$\sup\{|Tx| \ : \ \|x\| \leq 1\} < \infty,$$

cioè T è continua (vedi l'osservazione (4.16). Proviamo dunque che $\|T_n - T\| \to 0$. Avendosi

$$|Tx - T_n x| \leq |Tx - T_m x| + |T_m x - T_n x| \leq |Tx - T_m x| + \varepsilon \quad \forall\, n, m > n_\varepsilon,$$

e poiché il primo membro è indipendente da m, allora passando al limite per $m \to \infty$ si ottiene che

$$\|T - T_n\| < \varepsilon \ \ \forall n > n_\varepsilon$$

e quindi la tesi. $\square$

Completamento di uno spazio metrico

Se uno spazio metrico non è completo, come ad esempio $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, lo si può completare immergendolo isometricamente in uno spazio completo, come ad esempio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. L'esistenza e l'unicità (a meno di isometrie) del completamento è garantita dal Teorema del Completamento (cfr. per esempio [1], pag. 182).

Bibliografia

[1] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.