Capitolo 1

Introduzione

Buona parte del materiale di questo capitolo è tratto da Cabib [2].

Forma generale di un problema di minimo

Dato un insieme X ed una funzione $F : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, un elemento $x \in X$ si dice *punto di minimo* per F su X se

$$F(x) \leq F(y) \quad \forall\, y \in X.$$

Risolvere il problema di minimo

$$\min_{y \in X} F(y)$$

significa stabilire se il minimo esiste ed in tal caso trovare i punti di minimo, cioè gli $x \in X$ tali che

$$F(x) = \min\{F(y) \ : \ y \in X\}.$$

Problemi del Calcolo delle Variazioni

Nel Calcolo delle Variazioni (nel seguito, brevemente, CdV) X è generalmente[1] uno spazio di funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e F è un funzionale integrale

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx \tag{1.0.1}$$

dove $Du = (\frac{\partial u_i}{\partial x_j})$ denota la matrice jacobiana di u e l'*integrando* $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \to \overline{\mathbb{R}}$ deve soddisfare condizioni sufficienti a garantire che l'integrale abbia senso per ogni $u \in X$. Nella (1.0.1) potrebbero comparire anche derivate di ordine superiore. Sulla frontiera di Ω possono essere assegnate

- *condizioni di Dirichlet* in cui si assegna il valore di u;
- *condizioni di Neumann* in cui si assegna il valore della derivata normale di u (cioè $Du(x) \cdot \nu(x)$ dove $\nu(x)$ è un versore normale a $\partial\Omega$ che perciò deve essere abbastanza regolare);
- *condizioni miste*: Dirichlet su una parte del bordo, Neumann sul complementare.

[1] Talvolta X può essere anche uno spazio di misure o più in generale di ditribuzioni

Se F non è a priori un integrale, il CdV si preoccupa di determinare delle condizioni affinché esso ammetta una rappresentazione integrale (Buttazzo [1]).

Il CdV in senso stretto consiste in una tecnica sviluppata da Eulero per la risoluzione di problemi di minimo. Altre tecniche sono state poi sviluppate in seguito, ma il nome di CdV ha continuato a denotare quella parte della matematica che si occupa dello studio di problemi di minimo.

Presentazione informale di alcuni problemi di minimo

Problemi isoperimetrici

Versione generale:

- tra tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di assegnato perimetro trovare quello di misura massima;
- tra tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di assegnato volume trovare quello di perimetro minimo.

Storicamente la nascita dei problemi isoperimetrici si fa risalire alla fondazione di Cartagine.[2]

Un semplice problema isoperimetrico è il seguente: *tra tutti i rettangoli di fissato perimetro $\mathcal{P}$, trovare quello che racchiude la massima area.*

Indicate con a e b le misure dei lati del rettangolo e con A l'area si ha

$$\mathcal{P} = 2(a+b) \qquad A = ab.$$

Si ha dunque, utilizzando la disuguaglianza (di Young) $a^2 + b^2 \geq 2ab$,

$$\mathcal{P}^2 = 4(a+b)^2 = 4(a^2 + b^2 + 2ab) \geq 4(2ab + 2ab) = 16ab = 16A$$

cioè, riassumendo, vale la seguente *disuguaglianza isoperimetrica*

$$A \leq \frac{\mathcal{P}^2}{16};$$

per come è stata ottenuta, l'uguaglianza vale se e solo se $a = b$, cioè nel caso del quadrato. Tra tutti i rettangoli di fissato perimetro il quadrato ha dunque area massima.

Si potrebbe anche considerare il problema duale ("isodiametrico"): − *tra tutti i rettangoli di fissata area trovare quello di perimetro minimo* −. La soluzione è di nuovo il quadrato.

In generale, per affrontare un problema isoperimetrico si cerca di dare una stima universale della misura (area, volume,...) in termini del perimetro

$$m(\Omega) \leq C(n)\mathcal{P}(\Omega)^{\alpha(n)} \qquad \textit{(disuguaglianza isoperimetrica)}$$

con $C(n)$ constante indipendente da Ω e poi si cerca di trovare l'insieme Ω ottimale, cioè quello che realizza l'uguaglianza (cosa possibile solo se si è indovinata la costante ottimale).

[2] 814 a.C. La leggenda narra di Elissa, principessa di origine fenicia, figlia del re di Tiro. Alla morte del padre, Pigmalione il fratello di Elissa, sale al trono e fa uccidere a tradimento lo zio, marito di Elissa, per prendere tutte le sue ricchezze. Dopo la morte del marito, insieme alla sorella e a pochi fedeli, Elissa fugge per mare finchè approda in Libia. È per questo che Elissa viene ricordata con il nome di Didone, cioè l'errante. La Libia era la terra di Jarba, re dei Getuli. Jarba non vuole dare ai fuggiaschi nè asilo nè terre ove stabilirsi, a meno che Didone non acconsenta a sposarlo. La donna rifiuta e allora il re le concede tanta terra quanta ne può contenere una pelle di bue. Didone accetta la sfida e fa tagliare la pelle in striscie sottili che, legate insieme, formano un nastro per recintare, anzichè coprire, la terra richiesta. Piace ai matematici pensare che la lunga striscia di pelle abbia delineato una semicirconferenza chiusa dalla riva del mare. Didone avrebbe così risolto un problema isoperimetrico: determinare la figura piana di area massima, avendo a disposizione un perimetro fissato.

Ma consideriamo ora il *problema di Didone: quale curva piana e sufficientemente regolare di lunghezza assegnata ℓ con primo e secondo estremo in punti distinti dell'asse x rende massima l'area della regione che essa delimita insieme alla retta $y = 0$?*

Non è restrittivo assumere che $\ell = \pi$ e $y \geq 0$. Indichiamo con Ω la regione delimitata dalla curva di equazioni parametriche

$$(x(s), y(s)), \quad s \in [0, \ell], \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

e dall'asse x. Usando le formule di Stokes o di Gauss-Green, la disuguaglianza di Young e la disuguaglianza di Poincaré

$$\int_0^\pi y^2 ds \leq \int_0^\pi {y'}^2 ds,$$

che verrà chiarita tra poco, si ottiene

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_\Omega \frac{\partial y}{\partial y}\, dxdy = -\int_{\partial\Omega^+} y\, dx \\ &= -\int_0^\pi y x'\, ds \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi ({x'}^2 + y^2)\, ds \leq \frac{1}{2}\int_0^\pi ({x'}^2 + {y'}^2)\, ds = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

dal momento che ${x'}^2 + {y'}^2 = 1$ perchè la curva è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Ogni semicirconferenza della forma

$$\begin{cases} x(s) = c + \cos s \\ y(s) = \operatorname{sen} s, \end{cases} \qquad s \in [0, \pi]$$

realizza l'uguaglianza.

Dimostriamo la disuguaglianza di Poincarè nel caso in cui la funzione y sia continua e regolare a tratti, cioè continua su $I = [0, \pi]$ e derivabile su I con derivata limitata e continua su I, ad eccezione di un numero finito di punti in cui può non essere derivabile ma esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata. Supponiamo anche che $y(0) = y(\pi) = 0$. Indichiamo ancora con $y(s)$ il suo prolungamento dispari e 2π-periodico a tutto $\mathbb{R}$. In tali ipotesi y è somma uniforme (in quanto continua) della propria serie di Fourier (teorema di Dirichlet) cioè della serie

$$y(s) = \sum_{n=1}^\infty \hat{y}(n) \operatorname{sen}(ns), \qquad \hat{y}(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi y(s) \operatorname{sen}(ns)\, ds.$$

Applicando l'identità di Parseval alla y si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi y^2\, ds = \sum_{n=1}^\infty |\hat{y}(n)|^2. \tag{1.0.2}$$

Alla y', che è integrabile e periodica di periodo 2π, si può invece applicare la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{n=1}^\infty |\hat{y'}(n)|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi {y'}^2\, ds, \tag{1.0.3}$$

nella quale, essendo y' pari,

$$\hat{y'}(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi y'(s) \cos(ns)\, ds = n\hat{y}(n), \tag{1.0.4}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene integrando per parti. Riunendo (1.0.2), (1.0.3) e (1.0.4) si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} y^2\,ds = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{y}(n)|^2 \leq \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\hat{y}(n)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} {y'}^2\,ds$$

cioè la tesi.

Esercizio 1.0.1 Dimostrare che nel caso di un intervallo I di lunghezza ℓ si ha

$$\int_I y^2\,ds \leq (\frac{\ell}{\pi})^2 \int_I {y'}^2\,ds$$

e che la costante è ottimale ($\mathrm{sen}(\pi s/\ell)$ realizza l'uguaglianza).

Il problema delle geodetiche

Dati due punti A e B su una superficie regolare Γ, trovare la curva di minima lunghezza, sulla varietà, che abbia come estremi A e B.

Se come spazio X si considera quello delle curve $\boldsymbol{x}(t)$ regolari a tratti con $t \in [0,1]$, allora si tratta di minimizzare il funzionale che esprime la lunghezza

$$L(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 |\boldsymbol{x}'(t)|\,dt.$$

In $\mathbb{R}^n$ i punti di minimo saranno le rette, su una sfera archi di cerchio massimo.

Il problema della brachistocròna

Si tratta di *determinare la curva liscia γ a cui deve essere vincolato un punto materiale pesante affinchè il tempo impiegato durante la caduta, tra due assegnate posizioni A e B, risulti minimo.*

Questo problema, posto da Joan Bernoulli nel 1696, in una delle sfide matematiche dell'epoca, segna convenzionalmente l'inizio del Calcolo delle Variazioni. Sembra che lo stesso Joan Bernoulli fosse già in possesso della soluzione, ma comunque il problema appassionò e venne risolto anche da James Bernoulli, Newton e l'Hôpital.

Supponendo che P abbia massa m, e che in un sistema di riferimento con asse x orizzontale e asse y verticale discendente, parta da $A = (0,0)$ con velocità nulla e debba arrivare in $B = (l,a)$. Per la conservazione dell'energia meccanica si ha, in ogni istante,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

essendo $y = y(x)$ la curva su cui P deve muoversi (parametrizzata con x). Il tempo impiegato per andare da A a B è allora

$$T = \int_\gamma \frac{ds}{v} = \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+{y'}^2}{2gy}}\,dx$$

e il problema diventa quindi

$$\min F(y) = \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+{y'}^2}{y}}\,dx$$

con le condizioni di Dirichlet $y(0) = 0$ e $y(\ell) = a$. La soluzione è la curva brachistocròna (brachistos = minimo, chronos= tempo) che è un arco di cicloide.

Il problema di Fermat

Il funzionale del problema della brachistocròna è un caso particolare di

$$F(y) = \int_0^\ell h(y)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

che interviene anche nel modello generale classico della propagazione della luce attraverso un mezzo trasparente. Ad ogni punto P del mezzo corrisponde il modulo $v(P) \geq 0$ della velocità con cui il raggio di luce passa attraverso P. Secondo il Principio di Fermat la luce viaggia, tra due punti dello spazio, lungo una traiettoria che minimizza il tempo

$$\min_\gamma \int_\gamma \frac{ds}{v}.$$

Se la curva γ ammette la rappresentazione parametrica

$$(x(t), y(t)), \quad t \in [0, 1]$$

e si suppone di classe C^1 a tratti allora il funzionale da minimizzare si scrive nella forma

$$F(x, y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{v(x, y)}\, dt.$$

Nel caso di un mezzo omogeneo in cui v è costante si ricade nel caso delle geodetiche; il minimo tempo e la minima lunghezza sono la stessa cosa e la luce viaggia in linea retta se lo spazio è quello ordinario euclideo.

Se le proprietà materiali dipendono solo dalla quota y allora si può dimostrare che le curve sono grafici $y = y(x)$ e il funzionale diventa

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y)}\, dt.$$

Il caso in cui v non è costante, ma per esempio decrescente con la quota y, accade ad esempio quando in un caldo pomeriggio estivo gli strati dell'aria più vicino all'asfalto sono più rarefatti a causa della maggiore temperatura; il raggio di luce che parte dal sole e raggiunge i nostri occhi li preferisce e quindi si incurva dandoci l'impressione che si tratti di un fenomeno di riflessione. Per questo chi guarda da lontano vede il cielo in direzione della terra e la scambia per acqua.

Il riferimento alle geodetiche del caso omogeneo suggerisce di ribaltare il punto di vista e di considerare le soluzioni dei problemi di minimo tempo come le geodetiche di uno spazio non euclideo, dove le nuove rette si identificano con le traiettorie della luce.

Problemi di conduzione termica o elettrica

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Il problema di minimo

$$\min F(u) = \int_\Omega \frac{|Du|^2}{2}\, dx - \int_\Omega g \cdot u\, dx \tag{1.0.5}$$

con $u : \Omega \to \mathbb{R}$ soddisfacente la condizione di Dirichlet $u_{|\partial\Omega} = u_0$ descrive la conduzione stazionaria del calore in un conduttore termico Ω nel quale è presente una fonte distribuita di calore $g : \Omega \to [0, +\infty)$ posto in un ambiente a temperatura costante $u = u_0$. Il funzionale $F(u)$ è strettamente convesso a questo fa si che vi sia un unico punto di minimo che rappresenta la distribuzione di temperatura nel conduttore.

Lo stesso problema descrive la distribuzione del potenziale elettrostatico all'interno di un conduttore elettrico immerso in un materiale dielettrico isolante mantenuto ad un potenziale u_0. La funzione g rappresenta un'assegnata distribuzione di carica elettrica.

Elasticità (non lineare)

Supponiamo che un solido elastico occupi un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ che viene assunta come configurazione di riferimento. Supponiamo poi che sia sottoposto a forze di volume di densità $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ assegnata, che tendono a deformarlo mentre parte della frontiera sia soggetta ad una deformazione assegnata $y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (per esempio l'identità). Le configurazioni di equilibrio del solido elastico sono i punti di minimo del funzionale

$$F(y) = \int_\Omega W(x, Dy(x))\, dx - \int_\Omega g(x) \cdot y\, dx$$

dove la funzione W, generalmente non convessa nel gradiente di y, dipende dalla microstruttura del materiale, cioè dalla eventuale struttura cristallina e in ultima analisi dall'interazione molecolare.

Elasticità lineare

Se il solido che occupa il sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^3$ soddisfa a certe caratteristiche, cioè se è un "solido elastico lineare, omogeneo e isotropo", ed è soggetto a forze di volume di densità $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ assegnata, allora le configurazioni di equilibrio sono i punti di minimo del funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(\mathrm{e}(u))\, dx - \int_\Omega g \cdot u\, dx$$

dove $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ rappresenta lo spostamento dalla configurazione di riferimento, $\mathrm{e}(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T)$ è la parte simmetrica del gradiente, e l'integrando f dipende dal materiale. Molto studiati sono i materiali di De Saint Venant - Kirkhhoff in cui

$$f(e) = \mu |\,\mathrm{e}\,|^2 + \frac{\lambda}{2} |\,\mathrm{tr}(e)|^2.$$

dove λ e μ sono due costanti non negative, dette costanti di Lamè, che dipendono dal materiale.

Bibliografia

[1] G. Buttazzo, *Semicontinuity, relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

[2] E. Cabib, *Calcolo delle variazioni per principianti*, http://users.uniud.it/cabib/-dispense/cdvpp.pdf.