Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

	Es. 1	Es. 2	Es. 3			Es. 4
			a	b	c	
Punti						
su max.	6	8	4	4	5	6

Esame di Algebra Lineare
20 gennaio 2025

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un sottospazio di V. Si provi che $W = V$ se e solo se $dim(W) = dim(V)$.

Esercizio 2. Determinare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = t \\ tx - ty = t \end{cases}$$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo di dimensione 2 siano

r la retta di equazione $3x - 4y + 12 = 0$,

s la retta di equazione $x + y - 3 = 0$,

t la retta ortogonale a s e passante per il punto di coordinate $(0, 4)$.

Si determini

a) le coordinate di un vettore ortogonale alla retta s;

b) l'equazione della retta t;

c) la distanza del punto P di intersezione tra r e s dal punto Q di intersezione tra r e t.

Esercizio 4. Si provi che un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ è iniettiva se e solo $\ker(f) = \{0_V\}$.

Esercizio 1. Chiaramente, se $W = V$ anche $\dim(W) = \dim(V)$. Viceversa, supponiamo che $\dim(W) = \dim(V)$. Poiché, per ipotesi, $W \leq V$, per dimostrare che $W = V$ basta provare che $W \geq V$. Poniamo $n := \dim(W)$ e sia

$$(w_1, \dots, w_m)$$

una base di W. Allora $w_1, \dots, w_m$ sono vettori linearmente indipendenti di W e quindi anche di V. Poiché $n = \dim(W) = \dim(V)$, per il corollario al Teorema di Sostituzione, segue che $(w_1, \dots, w_m)$ è una base anche di V. In particolare, se $v \in V$, allora v è combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, e quindi $v \in W$, da cui segue che $W \geq V$ e quindi $W = V$.

Esercizio 2.
La matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & -t \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è $-2t$, che si annulla per $t = 0$.

Quindi, per $t \neq 0$ il sistema ha un'unica soluzione. In tal caso posso dividere per t la seconda equazione ed ottengo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y = t \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sommando la prima equazione alla seconda ottengo

$$2x = t + 1, \text{ da cui } x = \frac{t+1}{2}$$

e sottraendo la seconda riga dalla prima ottengo

$$2y = t - 1, \text{ da cui } y = \frac{t-1}{2}.$$

Studio ora il caso $t = 0$. Il sistema diviene

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e la colonna dei termini noti è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^2$ generato delle colonne della matrice dei coefficienti. Quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha infinite soluzioni. Chiaramente un vettore

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

è una soluzione se e solo se $a + b = 0$, cioè $a = -b$. Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 3. a) Osservo che la retta s è parallela alla retta s' di equazione $x + y = 0$ ed il vettore v di coordinate $(1, 1)$ appartiene a v. Ne segue che un vettore w di coordinate (l, m) è ortogonale a s' (e quindi a s) se e solo se w è ortogonale a v, cioè se e solo se

$$l \cdot 1 + m \cdot 1 = 0$$

Ma questo è vero se e solo se

$$l = -m,$$

quindi tutti i vettori di coordinate $(l, -l)$ al variare di l in $\mathbb{R}$ sono ortogonali a s, in particolare

il vettore di coordinate $(1, -1)$ è ortogonale a s.

b) Per il punto precedente, segue che la retta t' passante per l'origine e ortogonale alla retta s ha equazione

$$x - y = 0$$

e quindi le rette ortogonali a s devono avere equazione del tipo

$$x - y + \lambda = 0$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$. In particolare, se vogliamo che una retta di equazione

$$x - y + \lambda = 0$$

passi per il punto di coordinate $(0, 4)$, il parametro λ deve soddisfare

$$0 - 4 + \lambda = 0,$$

cioè $\lambda = 4$ e quindi t ha equazione

$$x - y + 4 = 0.$$

c) Le coordinate (a, b) del punto P devono soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & - & 4y & + & 12 & = & 0 \\ x & + & y & - & 3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sottraendo alla prima equazione la seconda moltiplicata per 3, ottengo il sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & - & 7y & + & 21 & = & 0 \\ x & + & y & - & 3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Risolvendolo otteniamo $y = 3$ e $x = 0$, dunque P ha coordinate $(0, 3)$.

Analogamente, calcolo le coordinate del punto Q di intersezione tra r ed s risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x & - & 4y & + & 12 & = & 0 \\ x & - & y & + & 4 & = & 0 \end{cases}$$

Di nuovo, sottraendo alla prima equazione la seconda moltiplicata per 3, ottengo il sistema equivalente

$$\begin{cases} & & y & & & = & 0 \\ x & + & y & - & 4 & = & 0 \end{cases}$$

Da cui segue $y = 0$ e $x = -4$. Quindi le coordinate del punto Q sono $(-4, 0)$.

Ne segue che la distanza tra P e Q è

$$\sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Esercizio 4

Supponiamo che f sia iniettiva. Proviamo che $\ker(f) = \{0_V\}$ con la doppia inclusione Per le proprietà delle applicazioni lineari $f(0_V) = 0_W$, quindi

$$\{0_V\} \subseteq \ker(f). \tag{1}$$

D'altra parte, sia $v \in \ker(f)$, allora

$$f(v) = 0_W = f(0_V),$$

da cui segue, per l'iniettivit'a di f, che $v = 0_V \in \{0_V\}$ e quindi

$$\ker(f) \leq \{0_V\}. \tag{2}$$

Per (1) e (2) segue che $\ker(f) = \{0_V\}$.

Viceversa, supponiamo che $\ker(f) = \{0_V\}$. Proviamo che se v_1 e v_2 sono due vettori di V tali che

$$f(v_1) = f(v_2) \tag{3}$$

allora $v_1 = v_2$, da cui segue che f è iniettiva. Infatti per la linearità di f e dall'equazione (3) segue che

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1) - f(v_1) = 0_W = f(0_V),$$

quindi

$$v_1 - v_2 \in \ker(f).$$

D'altra parte, per ipotesi, $\ker(f) = \{0_V\}$, e quindi

$$v_1 - v_2 = 0_V,$$

cioè

$$v_1 = v_2.$$