Cognome Nome
Anno imm. Matricola

Compito test di Algebra Lineare a Ingegneria Civile
15 maggio 2025

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna, negli spazi previsti, scrivendo chiaramente in buon italiano. "Scrivere" significa dare solamente il risultato finale, mentre "calcolare", "risolvere", "determinare" significa fornire anche il procedimento, almeno in forma schematica. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta. Per ogni domanda è indicato il punteggio massimo ottenibile.

Potete usare una calcolatrice non troppo sofisticata, **non** il cellulare; niente libri, appunti o altro. Tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore. I parametri a e b da usare negli esercizi sono la penultima e l'ultima cifra del numero di matricola: scriveteli qua sotto.

$$a = \ldots\ldots, \qquad b = \ldots\ldots$$

Esercizio 1. (a) Dare la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. 4pt

(b) Siano 5pt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{R}^3$, e scrivere $12632v_3 + w$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

Ho $(v_1\, v_2\, v_3) = (e_1\, e_2\, e_3)V$, con V la matrice 3×3 le cui colonne sono le coordinate di v_1, v_2, v_3 elencate nel testo dell'esercizio. Poiché $\det(V) = 1 \neq 0$, i vettori v_i costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Osservo che

$$w = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} VV^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -9 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 10v_1 - v_3.$$

Ne segue che $12632v_3 + w = 12632v_3 + 10v_1 - v_3 = 10v_1 + 12631v_3$.

(c) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da 5pt

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F(v_3) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice associata a F rispetto alle basi canoniche, di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$.

Ho

$$\begin{pmatrix} Fv_1 & Fv_2 & Fv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $(e_1\, e_2\, e_3) = (v_1\, v_2\, v_3)V^{-1}$ ottengo

$$\begin{pmatrix} Fe_1 & Fe_2 & Fe_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Fv_1 & Fv_2 & Fv_3 \end{pmatrix} V^{-1} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Dunque, rispetto alle basi canoniche, F è associata a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -9 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -7 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.

(a) Dimostrare che un'applicazione lineare è iniettiva se e soltanto se il suo kernel è banale. 4pt

(b) Enunciare correttamente il Lemma di Rimpiazzamento, senza dimostrazione. 4pt

Esercizio 3. Risolvere il sistema 4pt

$$\begin{cases} x + 2ay + z = 0 \\ -2x + bz = a \\ -x + by = a \end{cases}$$

Esercizio 4. Applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alle colonne della matrice 4pt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$