Cognome Nome
Anno imm. Matricola

Secondo compito di Algebra Lineare a Ingegneria Civile e Ambientale
24 febbraio 2025

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna, negli spazi previsti, scrivendo chiaramente in buon italiano. "Scrivere" significa dare solamente il risultato finale, mentre "calcolare", "risolvere", "determinare" significa fornire anche il procedimento, almeno in forma schematica. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta. Per ogni domanda è indicato il relativo punteggio massimo.

Potete usare una calcolatrice non troppo sofisticata, **non** il cellulare; niente libri, appunti o altro. Tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 0.1. Sia $F : U \to V$ un'applicazione lineare, e sia $\{u_1, \dots, u_t\}$ una base di U.

(a) Dare la definizione di $\operatorname{im} F$ e dimostrare che è un sottospazio di V. 4pt

Per definizione, $\operatorname{im} F = \{F(u) : u \in U\}$. Devo dimostrare che $\operatorname{im} F$ contiene 0_V, che é chiuso per somma, e che è chiuso per prodotto per scalari. La prima cosa è vera perché $0_V = F(0_U)$. La seconda è vera perché $F(u_1) + F(u_2) = F(u_1 + u_2)$, e la terza perché $rF(u) = F(ru)$.

(b) È vero che l'insieme $\{F(u_1), \dots, F(u_t)\}$ è una base di $\operatorname{im} F$? Se sì dimostrarlo, se no fornire un controesempio. 4pt

Non è necessariamente vero. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da $F(x, y) = x$. Allora l'immagine della base canonica è l'insieme $\{1, 0\}$, che non è linearmente indipendente.

Esercizio 0.2. Siano dati i vettori $u = (1, 3, -5, 4), v = (2, -3, 4, 1) \in \mathbb{R}^4$.

(a) Calcolare $\cos(\theta)$, dove θ è l'angolo fra u e v. Si tratta di un angolo acuto, retto o ottuso? 4pt

Si ha

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{-23}{3\sqrt{170}} \sim -0.588.$$

Si tratta di un numero negativo, quindi θ è un angolo ottuso.

(b) Calcolare l'equazione del piano che contiene u ed è perpendicolare a v. 4pt

La famiglia di piani perpendicolare a v ha equazione $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = k$, con k parametro che varia in $\mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per u si ha $k = \langle u, v\rangle = -23$.

Esercizio 0.3. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare con matrice associata, rispetto alle basi canoniche,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2k \\ 5 & k+3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la dimensione di $\ker F$ è massima. 5pt

La dimensione del kernel è massima quando la dimensione dell'immagine è minima; si tratta dunque di rendere minimo il rango di A. Non è possibile ottenere rango 1 perché la sottomatrice 2×2 in alto a sinistra è nonsingolare. Con operazioni di riga ci riduciamo a

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & -5 & -3k+1 & 2k+3 \\ 0 & k-7 & 5-5k & 7 \end{pmatrix}.$$

Porre $k = 2$ rende le ultime due righe uguali, e dunque minimizza il rango; si tratta di vedere che non ci sono altre possibilità. La sottomatrice data dalle ultime due righe e dalla seconda e ultima colonna ha determinante $2k^2 - 11k + 14$, con la radice $k = 2$ che già conosciamo, e la seconda radice $7/2$. Sostituendo tale seconda radice nelle ultime due righe e colonne ottengo

$$\begin{pmatrix} -19/2 & 10 \\ -25/2 & 7 \end{pmatrix},$$

che è nonsingolare; dunque l'unica possibilità è $k = 2$.

(b) Per tali k, determinare una base per $\ker F$. 4pt

Sostituendo $k = 2$ nella matrice A' ed eliminando l'ultima riga, che come detto sopra è uguale alla seconda, ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dividendo l'ultima riga per -5, e sottraendo il doppio di quanto ottenuto dalla prima ci porta a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 1 & -7/5 \end{pmatrix}.$$

Le ultime due variabili sono libere, e $\ker F$ ha dimensione $4 - 2 = 2$; posso dunque risolvere i due sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 1 & -7/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che hanno soluzioni immediate $(0, -1, 1, 0)$ e $(-9/5, 7/5, 0, 1)$; questi due vettori costituiscono quindi una base per $\ker F$.

(c) Porre $k = 0$ e calcolare la matrice di F rispetto alla base canonica del dominio e alla base $(e_1, e_1 + e_2, -e_3)$ del codominio. 5pt

Sia $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ la base canonica del dominio. Per definizione di matrice associata a F abbiamo

$$\begin{pmatrix} F(e'_1) & F(e'_2) & F(e'_3) & F(e'_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il cambio di base è dato da

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_1 + e_2 & -e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} U.$$

Ne segue che

$$\begin{pmatrix} F(e'_1) & F(e'_2) & F(e'_3) & F(e'_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} U U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice richiesta è

$$U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$